Universität Ulm

Dienstag, 12.01.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Funktionalanalysis 2: Blatt 9

39. *Eindeutigkeit des Generators:* Sei H ein Hilbertraum, A ein m-akkretiver Operator auf H, und sei $(S(t))_{t\geq 0}$ die von $-A$ erzeugte Halbgruppe. Zeige:

(a) $D(A) = \{x \in \overline{D(A)} : \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x-x}{h} \text{ existiert}\}$ und $A^0 x = -\lim_{h\to 0} \frac{S(h)x-x}{h}$.
Tipp: Betrachte $\big(\frac{S(h)x-x}{h} - \frac{S(h)u-u}{h} \mid x-u\big)$ mit $u \in D(A)$.

(b) Ist $-B$ ein weiterer Generator von S, so ist $D(A) = D(B)$.

(c) Eine nicht-linearen Halbgruppe hat höchstens einen Generator.

40. Sei A ein m-akkretiver Operator auf $\mathbb{R}$ und $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Lösung des Cauchy-Problems $\dot{u}(t) + Au(t) = 0$, $u(0) = u_0$ für ein $u_0 \in D(A)$. Zeige:

(a) u ist monoton wachsend oder monoton fallend.

(b) Ist A einwertig, so ist u stetig differenzierbar.

41. Seien X und Y Banachräume, $A \subset X$, und sei f eine Funktion von A nach Y. Die Funktion

$$\omega_{f,A}\colon [0,\infty) \to [0,\infty], \quad \omega_{f,A}(r) \coloneqq \sup\{\|f(x)-f(y)\| : \|x-y\| < r\}$$

heißt *Stetigkeitsmodul von f auf A*. Offenbar ist $\omega_{f,A}$ monoton wachsend. Zeige:

(a) f ist genau dann gleichmäßig stetig auf A, wenn $\omega_{f,A}(r) \to 0$ für $r \to 0$ gilt.

(b) Ist f gleichmäßig stetig auf A, so gibt es genau eine stetige Funktion g auf $\overline{A}$ mit $g|_A = f$. Diese Funktion erfüllt $\omega_{g,\overline{A}} = \omega_{f,A}$.

(c) Sei $\alpha \in (0,1]$ und $c \geq 0$. Es gilt genau dann $\omega_{f,A}(r) \leq cr^\alpha$ für alle $r > 0$, wenn f in $\mathrm{C}^{0,\alpha}(A;Y)$ liegt und Hölderkonstante höchstens c hat.

(d) Ist f Lipschitz-stetig auf A, so gibt es genau eine Lipschitz-stetige Fortsetzung von f auf $\overline{A}$ mit gleicher Lipschitz-Konstanten.

42. Seien X und Y Banachräume, $A \subset X$, und sei $f\colon A \to Y$ Lipschitz-stetig. Zeige:

(a) Sind $g_\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen mit Lipschitz-Konstante höchstens $M \geq 0$, so ist auch $g(x) \coloneqq \sup_\alpha g_\alpha(x)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante höchstens M, falls es ein $x_0 \in X$ mit $g(x_0) < \infty$ gibt.

(b) Ist $Y = \mathbb{R}$, so gibt es eine Lipschitz-stetige Fortsetzung von f auf X mit gleicher Lipschitz-Konstanten.
Tipp: Betrachte $g_{x_0}(x) \coloneqq f(x_0) - L\|x-x_0\|$ für $x_0 \in A$, wobei L die Lipschitz-Konstante von f bezeichne.

(c) Ist Y endlich-dimensional, so gibt es eine Lipschitz-stetige Fortsetzung von f auf X, aber im Allgemeinen keine Lipschitz-stetige Fortsetzung mit gleicher Lipschitz-Konstanten.
Tipp: Betrachte $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $A \coloneqq \{(1,-1),(-1,1),(1,1)\}$ und $f(1,-1) \coloneqq (1,0)$, $f(-1,1) \coloneqq (-1,0)$, $f(1,1) \coloneqq (0,\sqrt{3})$.

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws09/fa2.html