Universität Ulm

Dienstag, 12.01.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 9

39. *Eindeutigkeit des Generators:* Sei H ein Hilbertraum, A ein m-akkretiver Operator auf H, und sei $(S(t))_{t\geq 0}$ die von $-A$ erzeugte Halbgruppe. Zeige:

(a) $D(A) = \{x \in \overline{D(A)} : \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x-x}{h}$ existiert$\}$ und $A^0x = -\lim_{h\to 0} \frac{S(h)x-x}{h}$.
Tipp: Betrachte $\big(\frac{S(h)x-x}{h} - \frac{S(h)u-u}{h} \mid x-u\big)$ mit $u \in D(A)$.

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für $x \in D(A)$ die rechtsseitige Ableitung von $S(t)x$ in jedem Punkt existiert und $-A^0S(t)x$ ist. In dieser Aufgabe ist also nur noch zu zeigen, dass aus der Existenz der rechtsseitigen Ableitung von $S(t)x$ in 0 folgt, dass x in $D(A)$ liegt.

Sei also $x \in \overline{D(A)}$ so, dass $-y := \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x-x}{h}$ existiert. Sei $u \in D(A)$ beliebig. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $-A^0u = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)u-u}{h}$ gilt. Sei $h > 0$ beliebig. Dann ist

$$(S(h)x - S(h)u \mid x-u) \leq \|S(h)x - S(h)u\| \, \|x-u\| \leq \|x-u\|^2 = (x-u \mid x-u),$$

woraus

$$((S(h)x-x) - (S(h)u-u) \mid x-u) \leq 0$$

folgt. Teilen durch $-h$ ergibt

$$-\left(\frac{S(h)x-x}{h} - \frac{S(h)u-u}{h} \mid x-u\right) \geq 0.$$

Der Grenzübergang $h \to 0$ zeigt nun

$$\big(y - A^0u \mid x-u\big) = -\big(-y + A^0u \mid x-u\big) \geq 0.$$

Weil dies für jedes $u \in D(A)$ richtig ist, ist also nach einem Lemma der Vorlesung $(x,y) \in A$, insbesondere also $x \in D(A)$.

(b) Ist $-B$ ein weiterer Generator von S, so ist $D(A) = D(B)$.

Lösung: Wegen $\overline{D(A)} = \overline{D(B)}$ folgt dies aus dem vorigen Aufgabenteil.

(c) Eine nicht-linearen Halbgruppe hat höchstens einen Generator.

Lösung: Sind $-A$ und $-B$ zwei Generatoren, so ist nach dem vorigen Aufgabenteil $D(A) = D(B)$. Laut Vorlesung ist dann auch $A^0 = B^0$, woraus $A = B$ folgt.

40. Sei A ein m-akkretiver Operator auf $\mathbb{R}$ und $u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ die Lösung des Cauchy-Problems $\dot{u}(t) + Au(t) = 0$, $u(0) = u_0$ für ein $u_0 \in D(A)$. Zeige:

(a) u ist monoton wachsend oder monoton fallend.

Lösung: Laut Vorlesung ist u stetig, es gilt fast überall $\dot{u}(t) = -A^0u(t)$, $A^0u(t)$ ist rechtsseitig stetig, und $|A^0u(t)|$ ist monoton fallend.

Ist $A^0u(0) = 0$, so ist wegen Monotonie $A^0u(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ und daher u konstant, also insbesondere monoton wachsend. Wir können also $A^0u(0) \neq 0$ annehmen.

Wir betrachten hier nur den Fall $A^0u(0) > 0$; der Fall $A^0u(0) < 0$ lässt sich vollkommen analog behandeln. Sei $t_0 := \inf\{t \geq 0 : A^0u(t) < 0\}$, und nehmen wir an, dass $t_0 < \infty$ ist. Wegen rechtsseitiger Stetigkeit ist dann $A^0 u(t_0) \leq 0$, insbesondere also $t_0 > 0$. Sei (t_n) eine monoton wachsende Folge in $[0, t_0)$, die gegen t_0 konvergiert. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $A^0 u(t_n)$ gegen ein y konvergiert. Nach Wahl der Folge (t_n) gilt $A^0 u(t_n) \geq 0$, also auch $y \geq 0$. Zudem konvergiert $u(t_n)$ gegen $u(t_0)$. Die Abgeschlossenheit von A zeigt dann $(u(t_0), y) \in A$. Wir haben somit gesehen, dass $Au(t_0)$ den nicht-positiven Wert $A^0 u(t_0)$ und den nicht-negativen Wert y enthält. Da $Au(t_0)$ laut Vorlesung konvex ist, gilt $0 \in Au(t_0)$, woraus $A^0 u(t_0) = 0$ folgt. Weil $|A^0 u(t)|$ monoton fällt, zeigt dies $A^0 u(t) = 0$ für alle $t \geq t_0$ im Widerspruch zur Definition von t_0. Also ist $t_0 = \infty$, was gerade $A^0 u(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ bedeutet. Somit ist $\dot{u}(t) \geq 0$ für fast alle t, also u monoton wachsend.

(b) Ist A einwertig, so ist u stetig differenzierbar.

Lösung: Es genügt zu zeigen, dass $A^0 u(t)$ stetig ist. Die rechtsseitige Stetigkeit ist aus der Vorlesung bekannt. Sei nun (t_n) eine monoton wachsende Folge mit Grenzwert t_0. Nach Teilfolgenauswahl konvergiert $A^0 u(t_n)$ gegen ein y. Wegen Abgeschlossenheit von A ist dann $y \in Au(t_0)$. Weil A einwertig ist, ist dann $y = A^0 u(t_0)$. Nach dem Haarspalterlemma folgt, dass der linksseitige Grenzwert von $A^0 u(t)$ in t_0 existiert und den Wert $A^0 u(t_0)$ hat. Also ist $A^0 u(t)$ stetig.

Bemerkung: Dasselbe Argument zeigt für beliebige Hilberträume, dass die Lösung eine schwach stetige Ableitung besitzt. In endlich-dimensionalen Räumen heißt das, dass u stetig differenzierbar ist.

41. Seien X und Y Banachräume, $A \subset X$, und sei f eine Funktion von A nach Y. Die Funktion

$$\omega_{f,A} \colon [0, \infty) \to [0, \infty], \quad \omega_{f,A}(r) := \sup\{\|f(x) - f(y)\| : \|x - y\| < r\}$$

heißt *Stetigkeitsmodul von f auf A*. Offenbar ist $\omega_{f,A}$ monoton wachsend. Zeige:

(a) f ist genau dann gleichmäßig stetig auf A, wenn $\omega_{f,A}(r) \to 0$ für $r \to 0$ gilt.

Lösung: Dies ist eine Umformulierung der Definition von gleichmäßiger Stetigkeit.

(b) Ist f gleichmäßig stetig auf A, so gibt es genau eine stetige Funktion g auf $\overline{A}$ mit $g|_A = f$. Diese Funktion erfüllt $\omega_{g,\overline{A}} = \omega_{f,A}$.

Lösung: Sei x in $\overline{A}$ und (x_n) eine beliebige Folge in A, die gegen x konvergiert. Dann ist (x_n) eine Cauchyfolge. Wegen

$$\|f(x_n) - f(x_m)\| \leq \omega_{f,A}(\|x_n - x_m\| + \varepsilon)$$

für alle $\varepsilon > 0$ ist dann auch $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge und daher konvergent. Weil $(f(x_n))$ für jede Folge (x_n) konvergiert, die gegen x konvergiert, ist der Grenzwert von $(f(x_n))$ unabhängig von der Wahl der Folge. Also erhält man $g(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ eine wohldefinierte, eindeutige Fortsetzung von f in x, insgesamt also eine eindeutige Fortsetzung g von f auf $\overline{A}$.

Die Abschätzung $\omega_{g,\overline{A}} \geq \omega_{f,A}$ ist klar nach Definition. Sei nun $r > 0$, und seien x und y aus $\overline{A}$ mit $\|x - y\| < r$. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es x_δ und y_δ in A mit $\|x_\delta - x\| < \delta$ und $\|y_\delta - y\| < \delta$. Insbesondere ist $\|x_\delta - y_\delta\| \leq \|x - y\| + 2\delta < r$, wenn δ hinreichend klein ist. Es ist

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|g(x) - f(x_\delta)\| + \|f(x_\delta) - f(y_\delta)\| + \|f(y_\delta) - g(y)\|.$$

Nach Definition der Fortsetzung ist also

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \liminf_{\delta\to 0} \|f(x_\delta) - f(y_\delta)\| \leq \liminf_{\delta\to 0} \omega_{f,A}(\|x_\delta - y_\delta\|) \leq \omega_{f,A}(r).$$

Nach Definition folgt $\omega_{g,\overline{A}}(r) \leq \omega_{f,A}(r)$.

(c) Sei $\alpha \in (0,1]$ und $c \geq 0$. Es gilt genau dann $\omega_{f,A}(r) \leq cr^\alpha$ für alle $r > 0$, wenn f in $\mathrm{C}^{0,\alpha}(A;Y)$ liegt und Hölderkonstante höchstens c hat.

Lösung: Es sei $\omega_{f,A}(r) \leq cr^\alpha$ für alle $r > 0$. Dann ist

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \omega_{f,A}(\|x-y\| + \varepsilon) \leq c(\|x-y\| + \varepsilon)^\alpha$$

für alle $\varepsilon > 0$. Im Grenzübergang zeigt dies die Hölderstetigkeit von f mit Exponent α und Konstante c.

Ist umgekehrt f hölderstetig mit Konstante höchstens c, so ist also

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x-y\|^\alpha \leq cr^\alpha$$

für alle x und y aus A mit $\|x - y\| < r$, also $\omega_{f,A}(r) \leq cr^\alpha$.

(d) Ist f Lipschitz-stetig auf A, so gibt es genau eine Lipschitz-stetige Fortsetzung von f auf $\overline{A}$ mit gleicher Lipschitz-Konstanten.

Lösung: Dies folgt direkt aus den vorigen beiden Aufgabenteilen.

42. Seien X und Y Banachräume, $A \subset X$, und sei $f\colon A \to Y$ Lipschitz-stetig. Zeige:

(a) Sind $g_\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktionen mit Lipschitz-Konstante höchstens $M \geq 0$, so ist auch $g(x) := \sup_\alpha g_\alpha(x)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante höchstens M, falls es ein $x_0 \in X$ mit $g(x_0) < \infty$ gibt.

Lösung: Angenommen, es gäbe x und y aus X mit $|g(x) - g(y)| = M\|x-y\| + \delta$ für ein $\delta > 0$. Ohne Einschränkung sei $g(x) > g(y)$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein g_ε mit $g_\varepsilon(x) > g(x) - \varepsilon$. Dann ist

$$g(x) - M\|x-y\| - \delta = g(y) \geq g_\varepsilon(y) \geq g_\varepsilon(x) - |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)| \geq g(x) - \varepsilon - M\|x-y\|.$$

Für $\varepsilon < \delta$ ist dies ein Widerspruch.

(b) Ist $Y = \mathbb{R}$, so gibt es eine Lipschitz-stetige Fortsetzung von f auf X mit gleicher Lipschitz-Konstanten.

Tipp: Betrachte $g_{x_0}(x) := f(x_0) - L\|x - x_0\|$ für $x_0 \in A$, wobei L die Lipschitz-Konstante von f bezeichne.

Lösung: Die Funktionen g_{x_0} sind nach der Dreiecksungleichung nach unten Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Also ist $g := \sup_{x_0 \in A} g_{x_0}$ nach dem vorigen Aufgabenteil Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante höchstens L; für die Endlichkeit von g beachte auch untenstehende Rechnung. Es genügt zu zeigen, dass g eine Fortsetzung von f ist, da die Lipschitz-Konstante von g dann höchstens größer als die von f sein kann.

Sei also $x \in A$. Dann ist $g(x) \geq g_x(x) = f(x)$, also $g \geq f$ auf A. Andererseits ist für jedes $x_0 \in A$

$$f(x) \geq f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \geq f(x_0) - L\|x - x_0\| = g_{x_0}(x),$$

was $g \leq f$ auf A zeigt.

(c) Ist Y endlich-dimensional, so gibt es eine Lipschitz-stetige Fortsetzung von f auf X, aber im Allgemeinen keine Lipschitz-stetige Fortsetzung mit gleicher Lipschitz-Konstanten.

Tipp: Betrachte $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $A := \{(1,-1), (-1,1), (1,1)\}$ und $f(1,-1) := (1,0)$, $f(-1,1) := (-1,0)$, $f(1,1) := (0, \sqrt{3})$.

Lösung: Ist $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, so kann man f in jeder Komponente Lipschitz-stetig fortsetzen und erhält eine Lipschitz-stetige Funktion mit gleicher Lipschitz-Konstanten. Da auf endlich-dimensionalen Räumen alle Normen äquivalent sind, zeigt dies die erste Behauptung.

Seien nun X, Y, A und f wie im Tipp. Dann hat f die Lipschitz-Konstante 1. Angenommen, es gibt eine Fortsetzung g von f auf X mit Lipschitz-Konstante 1. Dann hat $g(0)$ von $(1,0)$, $(-1,0)$ und $(0,\sqrt{3})$ jeweils einen euklidischen Abstand von höchstens 1. Der einzige Punkt mit Abstand höchstens 1 von $(1,0)$ und $(-1,0)$ ist $(0,0)$; dieser hat aber Abstand $\sqrt{3} > 1$ von $(0,\sqrt{3})$.