Funktionalanalysis 2: Blatt 10

43. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $1 < p < \infty$, und sei $\varphi\colon L^2(\Omega) \to (-\infty, \infty]$ gegeben durch $\varphi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p$. Zeige:

(a) φ ist konvex, unterhalb halbstetig, und nicht identisch ∞.

(b) Die zu φ konjugierte Funktion φ^* ist durch $\varphi^*(u) = \frac{1}{p'}\int_\Omega |u|^{p'}$ gegeben.

(c) Der Subgradient $\partial\varphi$ von φ ist durch

$$\partial\varphi = \big\{(u,v) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : v = |u|^{p-2}u\big\}$$

gegeben, einwertig und dicht definiert.

(d) Die von $-\partial\varphi$ erzeugte Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ erfüllt

$$S(t)u_0 = w(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\,u_0, & p = 2, \\ \operatorname{sgn}(u_0) \cdot \Big(\big((p-2)t + |u_0|^{2-p}\big)^+\Big)^{1/(2-p)}, & p \neq 2 \end{cases}$$

für jedes $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $t \geq 0$, wobei diese Ausdrücke auf $\{u_0 = 0\}$ als 0 zu verstehen sind.

(e) Sei $p > 2$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $t > 0$. Dann ist $S(t)u_0 \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, aber im Allgemeinen $S(t)u_0 \notin \bigcup_{1 \leq q < 2} L^q(\Omega)$.

(f) Sei $p < 2$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $t > 0$. Dann ist $S(t)u_0 \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, aber im Allgemeinen $S(t)u_0 \notin \bigcup_{2 < q \leq \infty} L^q(\Omega)$.

(g) Sei $p = 2$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $t > 0$. Im Allgemeinen ist $S(t)u_0 \notin \bigcup_{q \neq 2} L^q(\Omega)$.