Universität Ulm

Dienstag, 19.01.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 10

43. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $1 < p < \infty$, und sei $\varphi\colon L^2(\Omega) \to (-\infty, \infty]$ gegeben durch $\varphi(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p$. Zeige:

(a) φ ist konvex, unterhalb halbstetig, und nicht identisch ∞.

Lösung: Man kann leicht nachrechnen (zweite Ableitung nicht-negativ), dass die Funktion $x \mapsto x^p$ auf $[0,\infty)$ konvex und monoton wachsend ist. Weil auch der Betrag als Funktion auf $\mathbb{R}$ konvex ist, ist $v \mapsto |v|^p$ nach Aufgabe 6 konvex. Daraus folgt sofort die Konvexität von φ.

Für die Halbstetigkeit von unten sei (u_n) eine Folge in $L^2(\Omega)$, die in $L^2(\Omega)$ gegen u konvergiert. Sei $s := \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $(\varphi(u_n))$ gegen $s \in [0,\infty]$ konvergiert. Zudem dürfen wir nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass (u_n) punktweise gegen u konvergiert. Dann ist nach dem Lemma von Fatou

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p = \frac{1}{p}\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} |u_n|^p \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |u_n|^p = \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) = s.$$

Dies zeigt, dass φ unterhalb halbstetig ist.

Wegen $\varphi(0) = 0$ ist offenbar $\varphi \not\equiv \infty$.

(b) Die zu φ konjugierte Funktion φ^* ist durch $\varphi^*(u) = \frac{1}{p'}\int_\Omega |u|^{p'}$ gegeben.

Lösung: Sei zuerst $p \ge 2$, und sei $u \in L^2(\Omega)$. Nach Definition ist

$$\varphi^*(u) = \sup_{v\in L^2(\Omega)} \Big(\int_\Omega uv - \frac{1}{p}\int_\Omega |v|^p\Big) = \sup_{v\in L^p(\Omega)\cap L^2(\Omega)} \Big(\int_\Omega uv - \frac{1}{p}\int_\Omega |v|^p\Big).$$

Mit der Young-Ungleichung gilt für jedes $v \in L^p(\Omega)$

$$\int_\Omega uv \le \frac{1}{p'}\int_\Omega |u|^{p'} + \frac{1}{p}\int_\Omega |v|^p,$$

was

$$\varphi^*(u) \le \frac{1}{p'}\int_\Omega |u|^{p'}$$

zeigt.

Sei nun $v_n := \operatorname{sgn}(u)\cdot |u|^{1/(p-1)}\, \mathbb{1}_{A_n}$ für eine aufsteigende Folge messbarer Teilmengen (A_n) von Ω von endlichem Maß, die Ω ausschöpft. Wegen $p \ge 2$ ist $\frac{p}{p-1} \le 2$ und daher v_n in $L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\varphi^*(u) \ge \int_\Omega uv_n - \frac{1}{p}\int_\Omega |v_n|^p = \int_{A_n} \big(|u|^{p/(p-1)} - \frac{1}{p}|u|^{p/(p-1)}\big) = \frac{1}{p'}\int_{A_n} |u|^{p'}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, was nach dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\varphi^*(u) \ge \frac{1}{p'}\int_\Omega |u|^{p'}$$

zeigt. Damit ist der Fall $p \ge 2$ erledigt.

Die Aussage für $p < 2$ ergibt sich nun mittels $\varphi = \varphi^{**}$.

(c) Der Subgradient $\partial\varphi$ von φ ist durch

$$\partial\varphi = \big\{(u,v) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : v = |u|^{p-2}u\big\}$$

gegeben, einwertig und dicht definiert.

Lösung: Sei u_0 in $L^2(\Omega)$ so gewählt, dass $v_0 := |u_0|^{p-2}u_0$ in $L^2(\Omega)$ liegt. Insbesondere ist dann

$$\int_\Omega |u_0|^p = (u_0 \mid v_0) < \infty,$$

also $u_0 \in L^p(\Omega)$ und somit $v \in L^{p'}(\Omega)$. Dann gilt für alle $u \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega) = D(\varphi)$ nach der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}(v_0 \mid u - u_0) &= \int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 u - \int_\Omega |u_0|^p \\ &\le \frac{1}{p'}\int_\Omega |u_0|^p + \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p - \int_\Omega |u_0|^p = \varphi(u) - \varphi(u_0),\end{aligned}$$

wohingegen diese Abschätzung für $u \notin D(\varphi)$ trivial ist. Also ist $(u_0, v_0) \in \partial\varphi$.

Sei nun umgekehrt $(u_0, v_0) \in \partial\varphi$, insbesondere also $u_0 \in D(\varphi) = L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Wähle $u \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ beliebig. Dann ist

$$t\int_\Omega v_0 u = (v_0 \mid tu) \le \varphi(u_0 + tu) - \varphi(u_0) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u_0 + tu|^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p.$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nun beachte man, dass $x \mapsto |x|^p$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Ableitung durch $x \mapsto p|x|^{p-2}x$ gegeben ist. Also ist für $t \in [0,1]$ nach dem Mittelwertsatz

$$\Big|\frac{|u_0 + tu|^p - |u_0|^p}{t}\Big| = p|u_0 + \xi u|^{p-1}|u| \le p\big(|u_0| + |u|\big)^{p-1}|u| \in L^1(\Omega)$$

mit einem $\xi \in (0,t)$. Der Differenzenquotient ist also durch eine integrierbare Funktion dominiert. Zudem konvergiert der Differenzenquotient für $t \to 0$ punktweise gegen $p|u_0|^{p-2}u_0 u$. Nach dem Satz von Lebesgue ergibt sich hieraus und aus der ersten Überlegung durch Grenzübergang

$$\int_\Omega v_0 u \le \int_\Omega |u_0|^{p-2}u_0 u.$$

für alle $u \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Ersetzt man u durch $-u$, ergibt sich die umgekehrte Ungleichung. Weil $L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ dicht ist, folgt $v_0 = |u_0|^{p-2}u_0$ wie behauptet.

Dass $\partial\varphi$ einwertig ist, folgt aus der Beschreibung des Graphen. Zudem sieht man sofort, dass $D(\partial\varphi)$ die Testfunktionen enthält, was zeigt, dass $D(\partial\varphi)$ in $L^2(\Omega)$ dicht liegt.

(d) Die von $-\partial\varphi$ erzeugte Halbgruppe $(S(t))_{t\ge 0}$ erfüllt

$$S(t)u_0 = w(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}\,u_0, & p = 2, \\ \operatorname{sgn}(u_0)\cdot\Big(\big((p-2)t + |u_0|^{2-p}\big)^+\Big)^{1/(2-p)}, & p \ne 2 \end{cases}$$

für jedes $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $t \ge 0$, wobei diese Ausdrücke auf $\{u_0 = 0\}$ als 0 zu verstehen sind.

Lösung: Es genügt, diese Behauptung für Testfunktionen $u_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ zu zeigen; der allgemeine Fall ergibt sich dann aus der Stetigkeit von $S(t)$.

Sei also $u_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $u(t) \coloneqq S(t)u_0$. Wegen $u_0 \in D(A)$ für $A \coloneqq \partial\varphi$ gilt dann $u \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ und

$$u'(t) + Au(t) = u'(t) + |u(t)|^{p-2}u(t) = 0$$

fast überall für fast alle t. Man kann also hoffen, dass $v(t) \coloneqq u(t)(x)$ für jedes $x \in \Omega$ das Anfangswertproblem

$$\text{(AWP)} \begin{cases} v \in \mathrm{C}^1([0,\infty);\mathbb{R}), \\ v'(t) = -|v(t)|^{p-2}v(t), \\ v(0) = u_0(x) \end{cases}$$

löst; hierbei setzen wir implizit voraus, dass $u(t)$ stetig auf Ω ist, sodass v wohldefiniert ist. Wir lösen zuerst (AWP), um die Formel für w zu motivieren, und weisen danach nach, dass wir dadurch tatsächlich eine Lösung des ursprünglichen Problems gefunden haben.

Für $p = 2$ reduziert sich (AWP) auf $v'(t) = -v(t)$ und $v(0) = u_0(x)$, was die eindeutige Lösung $v(t) = u_0 \,\mathrm{e}^{-t}$ besitzt. In diesem Fall erhalten wir also die angegebene Form von w.

Sei nun $p \neq 2$ und v eine Lösung von (AWP). Aus der Differentialgleichung ergibt sich, dass $|v|$ monoton fällt und dort streng monoton fällt, wo v nicht verschwindet. Gibt es also ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $v(t_0) = 0$, so ist $v(t) = 0$ für $t \geq t_0$. Insbesondere zeigt dies, dass (AWP) eine eindeutige globale Lösung hat, da die rechte Seite außer bei einer Nullstelle von v sogar Lipschitz-stetig ist und wir gerade gesehen hatten, dass kein Blow-Up auftreten kann. Für die Berechnung einer Lösungsformel ist nur noch der Fall $v(0) = u_0(x) \neq 0$ interessant. Dann gilt in einer Umgebung der 0

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{|v|^{2-p}}{2-p} = |v|^{1-p}\operatorname{sgn}(v)\cdot v' = -1,$$

also

$$|v(t)|^{2-p} = (p-2)t + |v(0)|^{2-p}$$

und somit

$$v(t) = \pm\big((p-2)t + |v(0)|^{2-p}\big)^{1/(2-p)}.$$

Die Stetigkeit von v und die Anfangsbedingung erlauben uns, das Vorzeichen zu bestimmen, und wir erhalten, dass in einer Umgebung der 0 die Formel

$$v(t) = \operatorname{sgn}(u_0(x))\big((p-2)t + |u_0(x)|^{2-p}\big)^{1/(2-p)}$$

gilt. Da diese Überlegung in der Nähe jedes Punktes richtig ist, der keine Nullstelle von v ist, gilt die Formel für alle t bis zur ersten Nullstelle t_0 von v, sofern v überhaupt eine Nullstelle besitzt. Laut Vorüberlegung ist in diesem Fall $v(t) = 0$ für $t \geq t_0$. Daraus ergibt sich die Formel für w.

Wir zeigen nun noch, dass die durch diese Herleitung gefundenen Formeln tatsächlich die Halbgruppe darstellen, also dass w in $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(0,\infty;L^2(\Omega))$ liegt und $w'(t)+Aw(t) = 0$ für fast alle $t \geq 0$ erfüllt.

Der Fall $p = 2$ ist trivial, da hier sogar $w \in \mathrm{C}^\infty([0,\infty);L^2(\Omega))$ mit $w'(t) = -w(t)$ ist.

Sei nun also $p \neq 2$. Wir müssen nur zeigen, dass $t \mapsto Aw(t)$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;L^2(\Omega))$ liegt und

$$w(t) = w(0) - \int_0^t Aw(s)\,\mathrm{d}s$$

für fast alle $t \geq 0$ gilt. Aus der Formel ist sofort klar, dass $t \mapsto Aw(t)$ stetig in Raum- und Zeitvariablen ist, insbesondere also in $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;L^2(\Omega))$ liegt, und kompakten

Träger in der Raumkoordinate hat. Daraus folgt, dass das Bochnerintegral sogar in $\mathrm{C}_0(\Omega)$ existiert, wobei der Integralwert natürlich mit dem des Bochnerintegrals in $L^2(\Omega)$ übereinstimmt. Es genügt also zu zeigen, dass

$$w(t)(x) = w(0)(x) - \int_0^t (Aw(s))(x)\,\mathrm{d}s = w(0)(x) - \int_0^t |w(s)(x)|^{p-2} w(s)(x)\,\mathrm{d}s$$

für jedes $x \in \Omega$ und $t \geq 0$ gilt, da die Dirac-Funktionale in $\mathrm{C}_0(\Omega)$ die Punkte trennen. Die letzte Gleichheit ist aber klar nach Wahl von w, da $w(\cdot)(x)$ als Lösung von (AWP) definiert wurde.

(e) Sei $p > 2$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $t > 0$. Dann ist $S(t)u_0 \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, aber im Allgemeinen $S(t)u_0 \notin \bigcup_{1 \leq q < 2} L^q(\Omega)$.

Lösung: Es ist

$$|S(t)u_0| = \Big(\big((p-2)t + |u_0|^{2-p} \big)^+ \Big)^{1/(2-p)} = \Big((p-2)t + |u_0|^{2-p} \Big)^{-1/(p-2)}.$$

Also ist

$$|S(t)u_0| \leq \big((p-2)t \big)^{-1/(p-2)} \in L^\infty(\Omega)$$

und

$$|S(t)u_0| \leq \big(|u_0|^{2-p} \big)^{1/(2-p)} = |u_0| \in L^2(\Omega),$$

was $S(t)u_0 \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ zeigt.
Setzt man konkret $\Omega \coloneqq (1, \infty)$ und $u_0(x) \coloneqq \frac{1}{x^{1/2}\log(x)}$, so ist $u_0 \in L^2(\Omega)$ und

$$(S(t)u_0)(x) = \big((p-2)t + u_0(x)^{2-p} \big)^{1/(2-p)} \sim u_0(x) \quad (x \to \infty),$$

was $S(t)u_0 \notin L^q(\Omega)$ für $q < 2$ zeigt.

(f) Sei $p < 2$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $t > 0$. Dann ist $S(t)u_0 \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, aber im Allgemeinen $S(t)u_0 \notin \bigcup_{2 < q \leq \infty} L^q(\Omega)$.

Lösung: Es ist

$$|S(t)u_0| = \Big(\big(-(2-p)t + |u_0|^{2-p} \big)^+ \Big)^{1/(2-p)}$$

Also ist

$$|S(t)u_0| \leq \mathbb{1}_{\{|u_0|^{2-p} > (2-p)t\}} \big(|u_0|^{2-p} \big)^{1/(2-p)} = \mathbb{1}_{A_{t,u_0}} |u_0|,$$

wobei $A_{t,u_0} \coloneqq \{|u_0|^{2-p} > (2-p)t\}$ wegen $u_0 \in L^2(\Omega)$ eine Menge von endlichem Maß ist. Wegen $L^2(A_{t,u_0}) \subset L^1(A_{t,u_0})$ folgt hieraus $S(t)u_0 \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.
Setzt man konkret $\Omega \coloneqq (0, \frac{1}{2})$ und $u_0(x) \coloneqq \frac{1}{x^{1/2}|\log(x)|}$, so ist $u_0 \in L^2(\Omega)$ und

$$(S(t)u_0)(x) = \Big(\big(-(2-p)t + u_0(x)^{2-p} \big) \Big)^{1/(2-p)} \sim u_0(x) \quad (x \to 0),$$

was $S(t)u_0 \notin L^q(\Omega)$ für $q > 2$ zeigt.

(g) Sei $p = 2$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $t > 0$. Im Allgemeinen ist $S(t)u_0 \notin \bigcup_{q \neq 2} L^q(\Omega)$.

Lösung: Wegen $S(t)u_0 = \mathrm{e}^{-t} u_0$ ist $S(t)u_0$ genau dann in einem $L^q(\Omega)$, wenn u_0 selbst bereits in $L^q(\Omega)$ ist. Insbesondere liegt $S(t)u_0$ im Allgemeinen nur für $q = 2$ in $L^q(\Omega)$.