Universität Ulm

Dienstag, 02.02.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Funktionalanalysis 2: Blatt 11

44. Sei H ein Hilbertraum, A ein m-akkretiver Operator auf H und $(S(t))_{t\geq 0}$ die von $-A$ erzeugte Halbgruppe auf $\overline{D(A)}$. Zeige, dass der Operator A genau dann linear ist, also der Graph von A ein Unterraum von $H \times H$ ist, wenn $(S(t))_{t\geq 0}$ eine lineare Halbgruppe ist, also $\overline{D(A)}$ ein Unterraum von H ist und $S(t)$ für jedes $t \geq 0$ ein linearer Operator ist!

45. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $p \in (1, \infty)$. Wir versehen $W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit der üblichen Summennorm. Zeige:

(a) Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und eine beschränkte Menge $B \subset \Omega$ mit $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \varepsilon$ und $v = 0$ auf $\Omega \setminus B$.
Tipp: Zu einer Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ mit $\varphi = 1$ auf $B(0, 1)$ betrachte die Funktionen $u_n(x) \coloneqq u(x)\varphi(\frac{x}{n})$.
Hinweis: Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,p}(\Omega)$ aus $|v| \leq |u|$ bereits $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ folgt.

(b) Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, gibt es eine beschränkte Menge $B \subset \Omega$ mit $u = 0$ auf $\Omega \setminus B$ und ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \varepsilon$ und $v = 0$ auf $\Omega \setminus B$.
Tipp: Betrachte $u_n \coloneqq (|u| \wedge n)\,\mathrm{sgn}(u)$.

(c) Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, gibt es eine beschränkte Menge $B \subset \Omega$ mit $u = 0$ auf $\Omega \setminus B$ und ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathrm{C}_c(\Omega)$ mit $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \varepsilon$.
Tipp: Für eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, betrachte die Folge $u_n \coloneqq \psi(|\varphi_n| \wedge \|u\|_\infty)\,\mathrm{sgn}(\varphi_n)$ für ein $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ mit $\psi = 1$ auf B.

(d) Der Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ist $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.
Hinweis: Es darf verwendet werden, dass zu einer Funktion $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty)$, die Faltung $u_\varepsilon \coloneqq \varrho_\varepsilon * u$ in $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ liegt, für $\varepsilon \to 0$ in $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ gegen u konvergiert, und $u_\varepsilon(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ erfüllt ist, für die $u = 0$ auf $K(x, \varepsilon)$ gilt.

(e) Es gilt stets $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset H_0^p(\Omega)$. Ist Ω streifenbeschränkt, so sind die beiden Mengen sogar gleich.

46. Sei X ein normierter Raum und $C \subset X$ konvex. Zeige, dass dann auch das Innere und der Abschluss von C konvex sind!

47. Sei V ein Banachraum und $\varphi\colon H \to (-\infty, \infty]$ konvex und unterhalb halbstetig. Sei u ein Punkt in $\operatorname{dom}\varphi$, in dem φ stetig ist. Zeige, dass dann $\partial\varphi(u)$ nicht leer ist!
Bemerkung: In der Vorlesung wurde schon gezeigt, dass es ein $u' \in V'$ gibt, mit dem $\langle u', v - u\rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u)$ für alle v in $(\operatorname{dom}\varphi)^\circ$ gilt.

48. Sei X ein Banachraum, U ein abgeschlossener Unterraum von X, und sei C eine offene, konvexe Teilmenge von X mit $C \cap U = \emptyset$. Zeige, dass es dann ein $x' \in X'$ mit $\langle x', u\rangle = 0$ für alle $u \in U$ und $\langle x', x\rangle > 0$ für alle $x \in C$ gibt!
Bemerkung: Es darf folgende Version des Satzes von Hahn-Banach als bekannt vorausgesetzt werden: Ist C eine offene, konvexe Menge und $x \notin C$, so gibt es $x' \in X'$ mit $\langle x', y\rangle > \langle x', x\rangle$ für alle $y \in C$.

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws09/fa2.html