Universität Ulm

Dienstag, 02.02.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 11

44. Sei H ein Hilbertraum, A ein m-akkretiver Operator auf H und $(S(t))_{t\geq 0}$ die von $-A$ erzeugte Halbgruppe auf $\overline{D(A)}$. Zeige, dass der Operator A genau dann linear ist, also der Graph von A ein Unterraum von $H \times H$ ist, wenn $(S(t))_{t\geq 0}$ eine lineare Halbgruppe ist, also $\overline{D(A)}$ ein Unterraum von H ist und $S(t)$ für jedes $t \geq 0$ ein linearer Operator ist!

Lösung: Sei A linear. Dann ist $D(A)$ und somit auch $\overline{D(A)}$ ein Unterraum von H. Seien u_0 und v_0 in $D(A)$. Dann definiert $u(t) \coloneqq S(t)u_0$ und $v(t) \coloneqq S(t)v_0$ stetige, schwach differenzierbare Funktionen von $[0,\infty)$ nach H mit $\dot{u}(t) + Au(t) \ni 0$ und $\dot{v}(t) + Av(t) \ni 0$ für fast alle $t \in [0,\infty)$, $u(0) = u_0$ und $v(0) = v_0$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert dann $w(t) \coloneqq u(t) + \lambda v(t)$ eine stetige, schwach differenzierbare Funktion. Weil A linear ist und $(u(t), -\dot{u}(t)) \in A$ und $(v(t), -\dot{v}(t)) \in A$ für fast alle t richtig ist, ist $(w(t), -\dot{w}(t)) \in A$ für fast alle t, also $w(0) = u_0 + \lambda v_0$ und $\dot{w}(t) + Au(t) \ni 0$ für fast alle t bedeutet. Also ist w eine Lösung des Cauchy-Problems und somit

$$S(t)u_0 + \lambda S(t)v_0 = u(t) + \lambda v(t) = w(t) = S(t)w_0 = S(t)(u_0 + \lambda v_0).$$

Also ist $S(t)$ für jedes $t \in [0,\infty)$ auf dem Unterraum $D(A)$ linear. Wegen Stetigkeit ist $S(t)$ dann auch auf dem abgeschlossenen Unterraum $\overline{D(A)}$ linear.

Sei nun $(S(t))_{t\geq 0}$ eine lineare Halbgruppe. Dann folgt aus Aufgabe 39, Teil (a) sofort, dass die Ableitung $-A^0$ von $(S(t))_{t\geq 0}$ linear ist. Definiere nun den Operator B auf H durch

$$Bu \coloneqq A^0 u + D(A)^\perp,$$

also $(u,v) \in B$ genau dann wenn $u \in D(A)$ und $v - A^0 u \perp D(A)$. Aus der Linearität von A^0 folgt mit der zweiten Beschreibung einfach, dass B linear ist. Zudem ist B offensichtlich monoton.

Laut Aufgabe 39 ist $A^0 u$ die Ableitung von $S(t)u$ in $t = 0$. Weil $S(t)u$ für alle $t \geq 0$ in $\overline{D(A)}$ liegt, folgt hieraus $A^0 u \in \overline{D(A)}$ für alle $u \in D(A)$. Das zeigt $B^0 = A^0$ nach Definition der minimalen Sektion.

Nach Voraussetzung ist $(S(t))_{t\geq 0}$ eine (lineare) kontraktive C_0-Halbgruppe auf $\overline{D(A)}$, und laut Aufgabe 39 ist $-A^0$ ihr Generator. Nach dem Satz von Hille-Yoshida ist dann $1 + A^0$ invertierbar von $D(A)$ nach $\overline{D(A)}$. Sei nun $v \in H$. Dann gibt es $v_1 \in \overline{D(A)}$ und $v_2 \in D(A)^\perp$ mit $v = v_1 + v_2$. Weil $1 + A^0$ surjektiv nach $\overline{D(A)}$ abbildet, gibt es ein $u \in D(A)$ mit $u + A^0 u = v_1$. Also ist $v \in u + A^0 u + D(A)^\perp = u + Bu$, was zeigt, dass $1 + B$ surjektiv nach H ist. Also ist B m-akkretiv.

Wir haben gesehen, dass B ein m-akkretiver, linearer Operator mit $B^0 = A^0$ ist. Laut Vorlesung zeigt dies $A = B$, also dass A linear ist.

45. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $p \in (1,\infty)$. Wir versehen $W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ mit der üblichen Summennorm. Zeige:

(a) Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und eine beschränkte Menge $B \subset \Omega$ mit $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \varepsilon$ und $v = 0$ auf $\Omega \setminus B$.
Tipp: Zu einer Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ mit $\varphi = 1$ auf $B(0,1)$ betrachte die Funktionen $u_n(x) \coloneqq u(x)\varphi(\frac{x}{n})$.

Hinweis: Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,p}(\Omega)$ aus $|v| \le |u|$ bereits $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ folgt.

Lösung: Sei $\varphi_n \coloneqq \varphi(\frac{x}{n})$ und $u_n \coloneqq u\varphi_n$. Nach Definition von φ_n konvergiert φ_n punktweise gegen 1 und es gibt $c \ge 0$ mit $|\varphi_n| \le c$ auf $\mathbb{R}^N$ für alle n. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert u_n dann in $L^p(\Omega)$ und in $L^2(\Omega)$ gegen u.

Zudem ist nach der Produktregel u_n in $W^{1,p}(\Omega)$ mit $\nabla u_n = \nabla u\, \varphi_n + u\, \nabla\varphi_n$. Wie im ersten Teil des Arguments konvergiert der erste Summand in $L^p(\Omega)$ gegen ∇u. Wegen $\nabla\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\nabla\varphi(\frac{x}{n})$ konvergiert der zweite Summand in $L^p(\Omega)$ gegen 0.

Also konvergiert u_n in $W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ gegen u. Weil φ kompakten Träger hat, verschwindet jedes u_n außerhalb einer beschränkten Menge. Zudem ist $|u_n| \le c|u|$ und daher nach dem Hinweis $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Man kann also $v \coloneqq u_{n_0}$ für ein hinreichend großes n_0 wählen.

(b) Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, gibt es eine beschränkte Menge $B \subset \Omega$ mit $u = 0$ auf $\Omega \setminus B$ und ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \varepsilon$ und $v = 0$ auf $\Omega \setminus B$.
Tipp: Betrachte $u_n \coloneqq (|u| \wedge n)\operatorname{sgn}(u)$.

Lösung: Für u_n wie im Tipp gilt offenbar $|u_n| \le |u|$, und (u_n) konvergiert punktweise gegen u. Also konvergiert (u_n) nach dem Satz von Lebesgue in $L^p(\Omega)$ und $L^2(\Omega)$ gegen u. Laut Vorlesung ist $\nabla u_n = \nabla u\ \mathbb{1}_{\{|u|<n\}}$, was zeigt, dass ∇u_n fast überall gegen ∇u konvergiert und $|\nabla u_n| \le |\nabla u|$ erfüllt. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert also ∇u_n in $L^p(\Omega)$ gegen ∇u. Wegen $|u_n| \le |u|$ ist u_n in $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $u_n = 0$ auf $\Omega \setminus B$. Man kann also $v \coloneqq u_{n_0}$ für ein hinreichend großes $n_0 \in \mathbb{N}$ nehmen.

(c) Ist $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, gibt es eine beschränkte Menge $B \subset \Omega$ mit $u = 0$ auf $\Omega \setminus B$ und ist $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathrm{C}_c(\Omega)$ mit $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \varepsilon$.
Tipp: Für eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, betrachte die Folge $u_n \coloneqq \psi(|\varphi_n| \wedge \|u\|_\infty)\operatorname{sgn}(\varphi_n)$ für ein $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ mit $\psi = 1$ auf B.

Lösung: Sei u_n wie im Tipp. Nach Teilfolgenwahl können wir annehmen, dass (φ_n) und somit auch (u_n) fast überall gegen u konvergiert. Weil (u_n) durch $\|u\|_\infty\psi$ beschränkt ist, konvergiert (u_n) somit in $L^2(\Omega)$ gegen u. Wegen Stetigkeit der Verbandsoperationen in $W^{1,p}(\Omega)$ und nach der Produktregel konvergiert u_n gegen $\psi(|u| \wedge \|u\|_\infty)\operatorname{sgn}(u) = u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Zudem ist jedes u_n nach Konstruktion stetig und hat kompakten Träger in Ω. Man kann also $v \coloneqq u_{n_0}$ für hinreichend großes $n_0 \in \mathbb{N}$ nehmen.

(d) Der Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ ist $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.
Hinweis: Es darf verwendet werden, dass zu einer Funktion $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1, \infty)$, die Faltung $u_\varepsilon \coloneqq \varrho_\varepsilon * u$ in $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ liegt, für $\varepsilon \to 0$ in $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ gegen u konvergiert, und $u_\varepsilon(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$ erfüllt ist, für die $u = 0$ auf $K(x, \varepsilon)$ gilt.

Lösung: Man sieht sofort, dass $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ die Testfunktionen enthält und in $W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ abgeschlossen ist. Also ist auch der Abschluss der Testfunktionen in dieser Menge enthalten.

Sei nun also u in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Nach den vorigen Aufgabenteilen gibt es ein $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathrm{C}_c(\Omega)$ mit $\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir setzen v mit 0 auf ganz $\mathbb{R}^N$ fort. Sei K der Träger von v und $\delta_0 < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Dann hat laut Hinweis v_δ für jedes $\delta < \delta_0$ wiederum kompakten Träger in Ω und es gilt $v_\delta \to v$ in $L^2(\Omega)$ und in $W^{1,p}(\Omega)$. Wählt man δ klein genug, ist also $\varphi \coloneqq v_\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\|v - \varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Insgesamt haben wir also für jedes $\varepsilon > 0$ eine Testfunktion φ mit $\|u - \varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega)} < \varepsilon$ gefunden, was zeigt, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ dicht ist.

(e) Es gilt stets $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset H_0^p(\Omega)$. Ist Ω streifenbeschränkt, so sind die beiden Mengen sogar gleich.

Lösung: Offenbar ist die Identität eine stetige Abbildung von $W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ nach $H^p(\Omega)$, die die Testfunktionen auf die Testfunktionen abbildet. Also bildet sie auch den Abschluss $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ der Testfunktionen in $W^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ in den Abschluss $H_0^p(\Omega)$ der Testfunktionen in $H^p(\Omega)$ ab, was $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \subset H_0^p(\Omega)$ zeigt.
Sei nun Ω streifenbeschränkt und $u \in H_0^p(\Omega)$. Dann gibt es Testfunktionen (φ_n) mit $\varphi_n \to u$ in $L^2(\Omega)$ und $\nabla\varphi_n \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$. Nach der Poincaré-Ungleichung ist (φ_n) dann eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ und konvergiert daher auch in $L^p(\Omega)$ gegen u. Folglich ist u in $W_0^{1,p}(\Omega)$, also insgesamt in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Wir haben $H_0^p(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ gezeigt.

46. Sei X ein normierter Raum und $C \subset X$ konvex. Zeige, dass dann auch das Innere und der Abschluss von C konvex sind!

Lösung: Sei C konvex. Seien x und y in $\overline{C}$ und λ in $[0,1]$. Dann gibt es Folgen (x_n) und (y_n) in C mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Dann ist $(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n)$ eine Folge in C, die gegen $\lambda x + (1-\lambda)y$ konvergiert. Also ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{C}$. Wir haben gezeigt, dass $\overline{C}$ konvex ist.

Seien nun x und y in C° und $\lambda \in [0,1]$. Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset C$ und $B(y,\varepsilon) \subset C$. Sei nun $z \in B(\lambda x + (1-\lambda)y, \varepsilon)$, also $\|h\| < \varepsilon$ mit $h := z - \lambda x - (1-\lambda)y$. Dann ist $x + h \in C$ und $y + h \in C$ und somit $\lambda(x+h) + (1-\lambda)(y+h) = z \in C$. Also ist $B(\lambda x + (1-\lambda)y, \varepsilon) \subset C$, was $\lambda x + (1-\lambda)y \in C^\circ$ zeigt. Wir haben somit gesehen, dass C° konvex ist.

47. Sei V ein Banachraum und $\varphi\colon H \to (-\infty,\infty]$ konvex und unterhalb halbstetig. Sei u ein Punkt in $\operatorname{dom}\varphi$, in dem φ stetig ist. Zeige, dass dann $\partial\varphi(u)$ nicht leer ist!
Bemerkung: In der Vorlesung wurde schon gezeigt, dass es ein $u' \in V'$ gibt, mit dem $\langle u', v-u\rangle \le \varphi(v) - \varphi(u)$ für alle v in $(\operatorname{dom}\varphi)^\circ$ gilt.

Lösung: Sei v in V beliebig gewählt. Wir wollen zeigen, dass $\langle u', v-u\rangle \ge \varphi(v) - \varphi(u)$ ist. Dazu dürfen annehmen, dass φ auf der Verbindungslinie von u und v nicht-negativ ist; anderenfalls verschieben wir φ um eine Konstante. Wegen $u \in (\operatorname{dom}\varphi)^\circ$ gibt ein $\lambda_0 \in (0,1)$ mit $\lambda u + (1-\lambda)v \in (\operatorname{dom}\varphi)^\circ$ für $\lambda \in (\lambda_0, 1)$. Wegen Konvexität und der schon gezeigten Abschätzung ist für $\lambda \in (\lambda_0,1)$ dann

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\varphi(v) &\ge \varphi(\lambda u + (1-\lambda)v) - \lambda\varphi(u) \ge \lambda\left\langle u', \lambda u + (1-\lambda)v - u\right\rangle \\ &= \lambda(1-\lambda)\left\langle u', v-u\right\rangle .\end{aligned}$$

Kürzt man den Faktor $1-\lambda$ und lässt dann λ gegen 1 gehen, zeigt dies die Behauptung.

Weil $\langle u', v-u\rangle \ge \varphi(v) - \varphi(u)$ für alle $v \in V$ richtig ist, haben wir $u' \in \partial\varphi(u)$ nachgewiesen, also $\partial\varphi(u) \ne \emptyset$.

48. Sei X ein Banachraum, U ein abgeschlossener Unterraum von X, und sei C eine offene, konvexe Teilmenge von X mit $C \cap U = \emptyset$. Zeige, dass es dann ein $x' \in X'$ mit $\langle x', u\rangle = 0$ für alle $u \in U$ und $\langle x', x\rangle > 0$ für alle $x \in C$ gibt!
Bemerkung: Es darf folgende Version des Satzes von Hahn-Banach als bekannt vorausgesetzt werden: Ist C eine offene, konvexe Menge und $x \notin C$, so gibt es $x' \in X'$ mit $\langle x', y\rangle > \langle x', x\rangle$ für alle $y \in C$.

Lösung: *Variante 1:* Betrachte den Banachraum $Y := X/U$ mit der natürlichen Norm. Dann ist $C' := \{c + U : c \in C\}$ offen und konvex in Y mit $0 \notin C'$. Wähle $y' \in Y'$ mit $\langle y', c'\rangle > 0$ für $c' \in C'$. Dann definiert $\langle x', x\rangle := \langle y', x + U\rangle$ ein Element von X' mit $x' = 0$ auf U und $\langle x', x\rangle > 0$ für $x \in C$.

Variante 2: Betrachte die offene, konvexe Menge $O := C - U$. Dann ist $0 \notin O$. Also gibt es $x' \in X'$ mit $\langle x', x\rangle > 0$ für $x \in C - U$, also $\langle x', c\rangle > \langle x', u\rangle$ für $c \in C$ und $u \in U$. Für festes

$u \in U$ ist dann also $\langle x', c \rangle > \langle x', \lambda u \rangle = \lambda \langle x', u \rangle$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, was nur im Fall $\langle x', u \rangle = 0$ möglich ist. Also ist $x' = 0$ auf U und $\langle x', c \rangle > 0$ für $x \in C$.