Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 20.10.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 1

1. Sei Ω eine Menge. Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für jede der folgenden Aussagen:

(a) Sei I eine Indexmenge und sei $\mathscr{T}_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$ eine Topologie von Ω. Dann ist auch $\mathscr{T} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathscr{T}_\alpha$ eine Topologie von Ω. (2)

Lösung: Wir prüfen die Axiome einer Topologie: Weil $\emptyset$ und Ω nach Definition in jeder der Topologien $\mathscr{T}_\alpha$ liegen, liegen sie auch im Durchschnitt $\mathscr{T}$. Sei J eine Indexmenge, und sei $(O_j)_{j\in J} \subset \mathscr{T}$. Für jedes $\alpha \in I$ ist dann also $O_j \in \mathscr{T}_\alpha$ für alle $j \in J$, und damit nach Definition einer Topologie $O := \bigcup_{j \in J} O_j \in \mathscr{T}_\alpha$. Das zeigt aber gerade $O \in \mathscr{T}$. Seien schließlich O_1 und O_2 in $\mathscr{T}$. Dann ist $O_1 \in \mathscr{T}_\alpha$ und $O_2 \in \mathscr{T}_\alpha$ für alle $\alpha \in I$. Nach Definition einer Topologie ist dann $O := O_1 \cap O_2 \in \mathscr{T}_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, was gerade $O \in \mathscr{T}$ bedeutet.

(b) Seien $\mathscr{T}_1$ and $\mathscr{T}_2$ Topologien von Ω. Dann ist auch $\mathscr{T} := \mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ eine Topologie. (2)

Lösung: Dies ist im Allgemeinen falsch. Betrachte dazu $\Omega = \{0, 1, 2\}$ und die Topologien $\mathscr{T}_1 := \{\emptyset, \Omega, \{1\}\}$ und $\mathscr{T}_2 := \{\emptyset, \Omega, \{2\}\}$. Dann enthält $\mathscr{T} := \mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ zwar die Mengen $\{1\}$ und $\{2\}$, aber nicht deren Vereinigung $\{1, 2\}$, ist also keine Topologie.

(c) Sei $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen von Ω. Es gibt eine gröbste Topologie $\mathscr{T}$ von Ω, die $\mathscr{A}$ enthält, d.h. $\mathscr{T}$ ist eine Topologie, $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$, und für jede weitere Topologie $\mathscr{T}'$ von Ω mit $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}'$ gilt $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$. (2)

Lösung: Wir setzen $\mathscr{T} := \bigcap \mathscr{S}$, wobei $\mathscr{S}$ über alle Topologien von Ω laufen soll, die $\mathscr{A}$ enthalten. Nach dem ersten Aufgabenteil ist $\mathscr{T}$ eine Topologie. Da $\mathscr{A}$ in jedem $\mathscr{S}$ liegt, gilt auch $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$. Ist $\mathscr{T}'$ eine weitere Topologie mit $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}'$, so durchläuft $\mathscr{S}$ auch $\mathscr{T}'$, und somit gilt $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$. Dies zeigt die Behauptung.

(d) Sei $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen von Ω. Es gibt eine feinste Topologie $\mathscr{T}$ von Ω, die $\mathscr{A}$ enthält, d.h. $\mathscr{T}$ ist eine Topologie, $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$, und für jede weitere Topologie $\mathscr{T}'$ von Ω mit $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}'$ gilt $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. (2)

Lösung: Setze $\mathscr{T} := \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist $\mathscr{T}$ eine Topologie, die sicherlich $\mathscr{A}$ enthält. Zudem gilt für jedes weitere Mengensystem $\mathscr{T}'$ offenbar $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$, insbesondere also auch für Topologien $\mathscr{T}'$, die $\mathscr{A}$ enthalten.

2. Sei $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Bestimme alle Topologien auf Ω! Wie viele dieser Topologien sind paarweise echt verschieden, entstehen also nicht durch Umnummerierung der Elemente auseinander? (2)

Lösung: Es gibt insgesamt 29 Topologien auf Ω. Wir ordnen diese nach Anzahl ihrer Elemente. Hierbei bezeichnen a, b und c immer paarweise verschiedene Elemente von Ω.

- bis zu 2 Elemente (1 Topologie): Nur $\{\emptyset, \Omega\}$, da jede Topologie diese Mengen enthält.
- 3 Elemente (6 Topologien): Die Menge $\{\emptyset, \Omega\}$ kann um eine beliebige weitere Teilmenge von Ω ergänzt werden, und man erhält stets eine Topologie. Da es insgesamt acht Teilmengen gibt, kommen so weitere sechs Topologien zustande. Je nach Elementanzahl der zusätzlichen Menge sind die Topologien echt verschieden oder nicht.

- 4 Elemente (9 Topologien): Hier gibt es die drei Topologien der Form $\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ und die sechs Topologien der Form $\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{a, b\}\}$. Es kann keine Topologien mit 4 Elementen geben, die zwei einelementige oder zwei zweielementige Mengen enthalten. Im ersten Fall läge die Vereinigung dieser beiden Mengen nicht in der Topolgie, im zweiten ihr Durchschnitt.
- 5 Elemente (6 Topologien): Es gibt hier drei Topologien der Form $\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ und drei Topologien der Form $\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Man kann man nicht drei einelementige Mengen oder drei zweielementige Mengen haben; in diesem Fall wären nämlich alle Teilmengen von Ω enthalten, also acht Stück. Legt man sich nun entweder auf zwei einelementige oder auf zwei zweielementige Mengen fest, so ist die verbleibende Menge dadurch bereits eindeutig bestimmt.
- 6 Elemente (6 Topologien): Es gibt sechs Topologien mit sechs Elementen, die man als $\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ schreiben kann. Weitere Topologien mit sechs Elementen gibt es nicht. Wie im letzten Teil hat man nämlich zwangsläufig genau zwei einelementige und genau zwei zweielementige Mengen. Nennt man nun die beiden einelementigen Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$, so ist sicherlich auch $\{a, b\}$ enthalten. Nimmt man nun eine der beiden verbleibenden zweielementigen Mengen hinzu, so ist die Topologie bis auf Umbenennung von obiger Form.
- 7 Elemente (0 Topologien): Hat man alle drei einelementigen Mengen oder alle drei zweielementigen Mengen in der Topologie, so enthält die Topologie bereits alle Teilmengen von Ω, hätte also acht Elemente.
- 8 Elemente (1 Topologie): Es gibt nur ein Mengensystem mit acht Elementen, nämlich $\mathcal{P}(\Omega)$, und dieses ist eine Topologie.

In obiger Aufzählung haben wir die Topologien bereits in sogenannte *Homöomorphieklassen* sortiert, also in Gruppen, innerhalb derer die Topologien durch Umbenennung auseinander hervorgehen. Nur bei den drei-, vier- und fünfelementigen Topologien gab es zwei Typen. Insgesamt kann man eine dreielementige Menge also auf genau 9 tatsächlich voneinander verschiedene Arten mit einer Topologie versehen.

Vergleich mit endlichen σ-Algebren (Tutorium): Es gilt der folgende Satz: Sei Ω eine Menge und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω mit höchstens abzählbar vielen Elementen, was beispielsweise für endliches Ω der Fall ist. Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $(A_i)_{i=1}^n$ von Ω mit der Eigenschaft, dass eine Menge B genau dann messbar ist, wenn sie eine Vereinigung von Mengen A_i ist. Inbesondere gibt es keine σ-Algebra mit abzählbar unendlich vielen Elementen.

Im Spezialfall $\Omega = \{0, 1, 2\}$ sieht man dann sofort, dass es nur 5 σ-Algebren geben kann, wobei drei davon isomorph sind, es also nur 3 echt verschiedene Typen von σ-Algebren auf dieser Menge gibt.

Für den Beweis des Satzes führen wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf Ω ein. Hier sei $x \sim y$ genau dann, wenn für eine messbare Menge $B \in \mathcal{F}$ mit $x \in B$ auch $y \in B$ gilt. Die Reflexivität und Transitivität von $\sim$ ist sofort klar. Für die Symmetrie sei $x \sim y$. Für $y \sim x$ genügt es zu zeigen (indirekter Beweis), dass aus $x \notin B$ auch $y \notin B$ folgt. Ist aber $x \notin B$, so ist $x \in B^c \in \mathcal{F}$, und daher gilt wegen $x \sim y$ auch $y \in B^c$, also $y \notin B$, was zu zeigen war. Somit ist $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

Wir zeigen nun, dass die Äquivalenzklassen (A_i) von $\sim$ alle messbar sind, woraus folgt, dass es höchstens abzählbar viele Äquivalenzklassen gibt und dass insbesondere die Vereinigungen von (A_i) wieder messbar sind. Sei dazu ein A_i fest gewählt und $x \in A_i$ beliebig. Der Durchschnitt $\hat{A}_i := \bigcap_{x \in B \in \mathcal{F}} B$ ist messbar als *abzählbarer* Durchschnitt messbarer Mengen. Es genügt also, $\hat{A}_i = A_i$ zu zeigen. Ist aber $y \in A_i$, also $x \sim y$, so folgt aus $x \in B \in \mathcal{F}$ auch $y \in B$, insgesamt also $y \in \hat{A}_i$. Ist umgekehrt $y \notin A_i$, also $x \not\sim y$, so gibt es nach Definition eine Menge $B \in \mathcal{F}$ mit $x \in B$ und $y \notin B$, was $y \notin \hat{A}_i$ zeigt. Wir haben $A_i = \hat{A}_i$ bewiesen.

Wir zeigen nun, dass jede messbare Menge eine Vereinigung von Äquivalenzklassen ist. Sei dazu $A \in \mathcal{F}$ beliebig und $\hat{A} := \bigcup_{x \in A} \{y \sim x\}$. Da $A \subset \hat{A}$ klar ist und $\hat{A}$ nach Definition eine Vereinigung von Äquivalenzklassen ist, ist nur noch $\hat{A} \subset A$ zu zeigen. Ist nun aber $y \in \hat{A}$, so gibt es ein $x \in A$ mit $y \sim x$. Nach Definition folgt aus $x \in A \in \mathcal{F}$ und $x \sim y$ aber $y \in A$, was insgesamt $\hat{A} \subset A$ zeigt.

Die letzte noch offene Behauptung ist, dass es nur endlich viele Äquivalenzklassen gibt. Dies ist nun aber klar, denn anderenfalls (also bei abzählbar unendlich vielen Äquivalenzklassen) gäbe es eine Bijektion zwischen messbaren Mengen und Teilmengen von $\mathbb{N}$, also überabzählbare viele messbare Mengen, im Widerspruch zur Annahme.

3. Für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ definiere $N_{a,b} := \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$. Zeige: (T)

(a) Das Mengensystem

$$\mathscr{T} := \{\mathcal{O} \subset \mathbb{Z} : \forall k \in \mathcal{O}\ \exists a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{N}\ k \in N_{a,b} \subset \mathcal{O}\}$$

ist eine Topologie von $\mathbb{Z}$.

Lösung: Für $\mathcal{O} = \emptyset$ ist die Bedingung trivialerweise erfüllt, also gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$. Für $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ kann man für jedes $k \in \mathcal{O}$ die Werte $a = 0$ und $b = 1$ wählen, da dann ja $k \in N_{0,1} = \mathbb{Z} \subset \mathcal{O}$ gilt.

Sei nun $\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{T}$ für $\alpha \in I$, I eine Indexmenge. Setze $\mathcal{O} := \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha$. Für $k \in \mathcal{O}$ gibt es also ein $\hat{\alpha} \in I$ mit $k \in \mathcal{O}_{\hat{\alpha}}$. Nach Definition gibt es dann $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $k \in N_{a,b} \subset \mathcal{O}_{\hat{\alpha}} \subset \mathcal{O}$, was gerade $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ zeigt.

Sei nun $\mathcal{O}_1 \in \mathscr{T}$ und $\mathcal{O}_2 \in \mathscr{T}$. Setze $\mathcal{O} := \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$. Sei $k \in \mathcal{O}$. Dann gibt es $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ mit $k \in N_{a_1,b_1} \subset \mathcal{O}_1$ und $k \in N_{a_2,b_2} \subset \mathcal{O}_2$. Da sich k von a_1 wegen $k \in N_{a_1,b_1}$ nur um ein Vielfaches von b_1 unterscheidet, stimmen die Mengen N_{a_1,b_1} und N_{k,b_1} überein. Wir sind also in der Situation $N_{k,b_1} \subset \mathcal{O}_1$ und analog $N_{k,b_2} \subset \mathcal{O}_2$. Nun ist offenbar $N_{k,b_1 \cdot b_2} \subset N_{k,b_1} \cap N_{k,b_2} \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}$, was insgesamt $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ zeigt.

Wir haben alle Axiome einer Topologie für $\mathscr{T}$ nachgerechnet.

Bemerkung: Die Topologie $\mathscr{T}$ ist die von den Mengen $N_{a,b}$ erzeugte Topologie, und die Mengen $N_{a,b}$ bilden eine Basis von $\mathscr{T}$.

(b) Ist $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$, so ist $\mathcal{O} = \emptyset$ oder $\mathcal{O}$ ist eine unendliche Menge.

Lösung: Sei $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ nicht leer, denn sonst ist nichts mehr zu zeigen. Sei $k \in \mathcal{O}$ beliebig gewählt. Dann gibt es $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $k \in N_{a,b} \subset \mathcal{O}$. Da bereits $N_{a,b}$ unendlich viele Elemente enthält, ist $\mathcal{O}$ eine unendliche Menge.

(c) Bezeichnet $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen, so gilt $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$.

Lösung: Die Inklusion "$\subset$" ist klar: Da $p \geq 2$ für alle $p \in \mathbb{P}$ gilt, ist für $k \in N_{0,p}$ entweder $k = 0$ oder $|k| \geq 2$, also $k \notin \{-1, 1\}$.

Für die umgekehrte Inklusion benutzen wir lediglich, dass jede natürliche Zahl außer 1 sich als nicht-leeres Produkt von Primzahlen schreiben lässt. Die etwas schwerer zu beweisende Tatsache, dass diese Darstellung im Wesentlichen eindeutig ist, wird hier nicht benötigt.

Sei also $k \in \mathbb{Z}$, $k \notin \{-1, 1\}$. Ist $k = 0$, so liegt k in $N_{0,2}$, was wegen $2 \in \mathbb{P}$ die Behauptung zeigt. Ist andererseits $k \neq 0$, so ist $|k| \geq 2$, was nach obiger Bemerkung zeigt, dass $|k|$ einen Primfaktor $p \in \mathbb{P}$ besitzt. Dann ist $k \in N_{0,p}$, die Behauptung also ebenfalls bewiesen.

(d) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ und jedes $b \in \mathbb{N}$ ist die Menge $N_{a,b}$ sowohl offen als auch abgeschlossen.

Lösung: Die Aussage $N_{a,b} \in \mathscr{T}$ ist trivial, da man in der Definition stets ebendiese Werte a und b wählen kann.

Um zu sehen, dass $N_{a,b}$ auch abgeschlossen ist, beweisen wir $N_{a,b}^c = \bigcup_{a' \notin N_{a,b}} N_{a',b}$. Dann ist $N_{a,b}^c$ die Vereinigung offener Mengen und daher offen, was nach Definition bedeutet, dass $N_{a,b}$ abgeschlossen ist. Die Inklusion "$\subset$" ist wegen $a' \in N_{a',b}$ klar. Für die andere Inklusion genügt die Beobachtung, dass $N_{a,b}$ und $N_{a',b}$ entweder identisch oder disjunkt sind, was man sich elementar überlegt: Gibt es n und n' mit $a + nb = a' + n'b$, so ist $a' - a = b(n' - n)$ durch b teilbar, also $N_{a,b} = N_{a',b}$.

(e) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Lösung: Wir nehmen an, dass es nur endlich viele Primzahlen gebe. Nach den vorigen Aufgabenteilen ist dann $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen und daher selbst abgeschlossen. Dann ist $\{-1, 1\}$ offen, im Widerspruch zur Aussage des zweiten Aufgabenteils.