Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Übungen Elemente der Topologie: Blatt 3

Bei der Bearbeitung dieses Blattes sollen nur die in der Vorlesung vorgestellten Definitionen und Sätze zu abgeschlossenen und offenen Mengen benutzt werden. Es ist folglich nicht erwünscht, dass bei den Aufgaben 9 und 10 mit Folgen argumentiert wird.

8. Sei Ω eine Menge und $d\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,x) := 0$ und $d(x,y) := 1$ für $x \neq y$. Zeige, dass d eine Metrik ist und bestimme die erzeugte Topologie! Für welche Ω erfüllt diese Topologie das erste bzw. zweite Abzählbarkeitsaxiom? (1)

9. Sei M ein metrischer Raum, X ein normierter Vektorraum, $B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$ und $\overline{B}(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$. Zeige:

(a) $\overline{B}(x,r)$ ist für alle $x \in M$ und alle $r > 0$ in M abgeschlossen. (1)

(b) Für $x \in X$ und $r > 0$ ist $\overline{B}(x,r)$ der Abschluss von $B(x,r)$ in X. (1)

(c) Für $x \in M$ und $r > 0$ ist $\overline{B}(x,r)$ nicht immer der Abschluss von $B(x,r)$ in M. (1)

10. Sei $\mathscr{T}_1$ die auf $\mathrm{C}[0,1]$ von $\|\cdot\|_1$ induzierte Topologie und $\mathscr{T}_\infty$ die von $\|\cdot\|_\infty$ induzierte. Sei $\mathrm{C}_+[0,1] := \{u \in \mathrm{C}[0,1] : u(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\}$.

(a) Zeige, dass die Menge $\mathrm{C}_+[0,1]$ bezüglich $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_\infty$ abgeschlossen ist! (3)

(b) Bestimme den inneren Kern von $\mathrm{C}_+[0,1]$ bezüglich $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_\infty$! (3)