UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Dienstag, 03.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 3

Bei der Bearbeitung dieses Blattes sollen nur die in der Vorlesung vorgestellten Definitionen und Sätze zu abgeschlossenen und offenen Mengen benutzt werden. Es ist folglich nicht erwünscht, dass bei den Aufgaben 9 und 10 mit Folgen argumentiert wird.

8. Sei Ω eine Menge und $d\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x,x) \coloneqq 0$ und $d(x,y) \coloneqq 1$ für $x \neq y$. Zeige, dass d eine Metrik ist und bestimme die erzeugte Topologie! Für welche Ω erfüllt diese Topologie das erste bzw. zweite Abzählbarkeitsaxiom? (1)

Lösung: Die Symmetrie und positive Definitheit von d ist klar. Für $x = y$ ist $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ trivialerweise erfüllt, und für $x \neq y$ ist $z \neq x$ oder $z \neq y$ (oder beides) und somit ebenfalls $d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y)$. Somit ist d eine Metrik.

Nach Definition der Metrik ist $B(x,1) = \{x\}$ für jedes $x \in \Omega$. Man sagt auch, dass jedes $x \in \Omega$ ein *isolierter Punkt* von Ω ist. Da in einem metrischen Raum die (offenen) Kugeln offen sind, enthält die Topologie also alle einelementigen Mengen. Da sich jede Teilmenge von Ω als Vereinigung von einelementigen Mengen schreiben lässt, folgt, dass jede Menge offen ist, die erzeugte Topologie also $\mathcal{P}(\Omega)$, die diskrete Topologie, ist. Man nennt daher d auch (eine) *diskrete Metrik*.

Da die Topologie von einer Metrik kommt, erfüllt sie (unabhängig von der Wahl von Ω) das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Da aus obigen Argumenten ersichtlich ist, dass die einelementigen Mengen eine Basis von Ω bilden, ist das zweite Abzählbarkeitsaxiom hier für jede abzählbare Menge Ω erfüllt. Wir zeigen, dass es nur dann erfüllt ist, wenn Ω abzählbar ist. Sei dazu $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie, und sei $x \in \Omega$. Wäre $\{x\}$ nicht in $\mathcal{B}$ enthalten, so könnte man die offene Menge $\{x\}$ im Widerspruch zur Definition einer Basis nicht als Vereinigung von Basismengen schreiben. Also enthält $\mathcal{B}$ alle einelementigen Teilmengen von Ω. Somit ist jede Basis $\mathcal{B}$ der Topologie überabzählbar, sofern Ω überabzählbar viele Elemente enthält. In diesem Fall erfüllt die Topologie also das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht.

Bemerkung: Es wurde hier sogar gezeigt, dass jede Basis der diskreten Topologie auf Ω mindestens die gleiche Kardinalität wie Ω hat (also mindestens so viele Elemente enthält) und dass es umgekehrt auch stets eine Basis mit der gleichen Anzahl von Elementen wie Ω gibt. Andererseits ist die Topologie $\mathcal{P}(\Omega)$ selbst stets von höherer Kardinalität als Ω (man kann auch sagen: nicht gleich mächtig wie Ω).

9. Sei M ein metrischer Raum, X ein normierter Vektorraum, $B(x,r) \coloneqq \{y \in X : d(x,y) < r\}$ und $\overline{B}(x,r) \coloneqq \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$. Zeige:

(a) $\overline{B}(x,r)$ ist für alle $x \in M$ und alle $r > 0$ in M abgeschlossen. (1)

Lösung: Seien $x \in X$ und $r > 0$. Wir müssen zeigen, dass $\overline{B}(x,r)^C$ offen ist, also dass es zu jedem $y \in \overline{B}(x,r)^C$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B(y,\varepsilon) \subset \overline{B}(x,r)^C$ gibt. Sei dazu $y \in \overline{B}(x,r)^C$, also $d(x,y) > r$. Wähle $\varepsilon \coloneqq d(x,y) - r > 0$. Ist nun $z \in B(y,\varepsilon)$, so gilt

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + \varepsilon = d(x,z) + d(x,y) - r$$

also $d(x,z) > r$, was $z \notin \overline{B}(x,r)$ und somit insgesamt $B(y,\varepsilon) \subset \overline{B}(x,r)^C$ zeigt.

(b) Für $x \in X$ und $r > 0$ ist $\overline{B}(x,r)$ der Abschluss von $B(x,r)$ in X. (1)

Lösung: Da $\overline{B}(x,r)$ eine abgeschlossene Menge ist, die $B(x,r)$ enthält, enthält sie auch die kleinste abgeschlossene Obermenge von $B(x,r)$, den Abschluss von $B(x,r)$. In Symbolen geschrieben heißt dies $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$.

Sei nun $y \in \overline{B}(x,r)$ und $U \in \mathcal{U}(y)$ eine beliebige Umgebung von y. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(y,\varepsilon) \subset U$, da die Kugeln mit Mittelpunkt y laut Vorlesung eine Umgebungsbasis von y bilden. Dann gilt für

$$z \coloneqq x + (1 - \tfrac{\varepsilon}{2r})(y - x) = \tfrac{\varepsilon}{2r}x + (1 - \tfrac{\varepsilon}{2r})y$$

einerseits

$$d(z,x) = \|z - x\| = (1 - \tfrac{\varepsilon}{2r})\|y - x\| \leq r - \tfrac{\varepsilon}{2} < r$$

und andererseits

$$d(z,y) = \|z - y\| = \|\tfrac{\varepsilon}{2r}x - \tfrac{\varepsilon}{2r}y\| = \tfrac{\varepsilon}{2r}\|x - y\| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

also $z \in B(x,r) \cap B(y,\varepsilon) \subset B(x,r) \cap U$. Wir haben also gezeigt, dass $U \cap B(x,r) \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von y richtig ist. Laut Vorlesung folgt daraus $y \in \overline{B(x,r)}$. Weil $y \in \overline{B}(x,r)$ beliebig war, haben wir nun auch $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$ gezeigt.

(c) Für $x \in M$ und $r > 0$ ist $\overline{B}(x,r)$ nicht immer der Abschluss von $B(x,r)$ in M. (1)

Lösung: Sei Ω eine Menge mit mindestens zwei Elementen, d die diskrete Metrik aus der vorigen Aufgabe und $x \in \Omega$ beliebig. Dann ist $B(x,1) = \{x\}$ abgeschlossen, da jede Teilmenge von Ω offen und abgeschlossen ist. Somit ist $\overline{B(x,1)} = \{x\}$. Andererseits ist $\overline{B}(x,1) = \Omega$.

Bemerkung: Es gilt aber stets $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$, da $\overline{B}(x,r)$ eine abgeschlossene Obermenge von $B(x,r)$ ist.

10. Sei $\mathscr{T}_1$ die auf $\mathrm{C}[0,1]$ von $\|\cdot\|_1$ induzierte Topologie und $\mathscr{T}_\infty$ die von $\|\cdot\|_\infty$ induzierte. Sei $\mathrm{C}_+[0,1] \coloneqq \{u \in \mathrm{C}[0,1] : u(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [0,1]\}$.

(a) Zeige, dass die Menge $\mathrm{C}_+[0,1]$ bezüglich $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_\infty$ abgeschlossen ist! (3)

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass das Komplement von $\mathrm{C}_+[0,1]$ in $\mathscr{T}_\infty$ offen ist. Sei dazu $u \notin \mathrm{C}_+[0,1]$. Es gibt also ein $x_0 \in [0,1]$ mit $\varepsilon \coloneqq -u(x_0) > 0$. Sei $B_\infty(u,\varepsilon)$ die ε-Kugel um u bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Ist nun $v \in B_\infty(u,\varepsilon)$, so ist

$$v(x_0) = v(x_0) - u(x_0) + u(x_0) \leq u(x_0) + \|v - u\|_\infty < -\varepsilon + \varepsilon = 0.$$

Also ist $v \notin \mathrm{C}_+[0,1]$, was $B_\infty(u,\varepsilon) \subset \mathrm{C}_+[0,1]^C$ zeigt. Nach Definition der Topologie ist dann $\mathrm{C}_+[0,1]^C$ offen und daher $\mathrm{C}_+[0,1]$ abgeschlossen in $\mathscr{T}_\infty$.

Wir zeigen nun, dass $\mathrm{C}_+[0,1]^C$ auch in $\mathscr{T}_1$ offen ist. Sei dazu $u \notin \mathrm{C}_+[0,1]$ und $x_0 \in [0,1]$ so gewählt, dass $2\varepsilon \coloneqq -u(x_0) > 0$ gilt. Wegen Stetigkeit gibt es dann $0 \leq a \leq x_0 \leq b \leq 1$, $a < b$, mit $u(x) \leq -\varepsilon$ für $x \in [a,b]$. Sei $r \coloneqq \varepsilon(b-a)$. Wir zeigen $B_1(u,r) \cap \mathrm{C}_+[0,1] = \emptyset$, wobei $B_1(u,r)$ die r-Kugel um u bezüglich $\|\cdot\|_1$ bezeichnet. Sei dazu $v \in \mathrm{C}_+[0,1]$. Dann ist

$$\|u - v\|_1 = \int_0^1 |u - v| \geq \int_a^b |u - v| = \int_a^b (v - u) \geq \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(b - a) = r,$$

also $v \notin B(u,r)$. Das zeigt $B_1(u,r) \cap \mathrm{C}_+[0,1] = \emptyset$, also $B_1(u,r) \subset \mathrm{C}_+[0,1]^C$. Somit ist nach Definition $\mathrm{C}_+[0,1]^C$ in $\mathscr{T}_1$ offen, also $\mathrm{C}_+[0,1]$ in $\mathscr{T}_1$ abgeschlossen.

Bemerkung: Da stets $\|u\|_1 \leq \|u\|_\infty$ gilt, ist laut Vorlesung $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_\infty$.[1] Daher ist jede in $\mathscr{T}_1$ abgeschlossene Menge auch in $\mathscr{T}_\infty$ abgeschlossen. Man hätte sich den ersten Teil des Beweises also sparen können.

[1] Dies kann man sich klarmachen, indem man beobachtet, dass stets $B_\infty(x,r) \subset B_1(x,r)$ gilt: Wenn eine Menge in $\mathscr{T}_1$ offen ist, also um jeden Punkt noch eine $\|\cdot\|_1$-Kugel gelegt werden kann, die in der Menge ist, dann kann man um jeden Punkt auch eine $\|\cdot\|_\infty$-Kugel legen, die noch in der Menge liegt, was zeigt, dass die Menge auch in $\mathscr{T}_\infty$ offen ist.

Bemerkung: Eine analoge Aussage bleibt (mit einem ähnlichen Beweis) auch in $L^p(\Omega)$ für einen beliebigen Maßraum Ω für $1 \leq p \leq \infty$ richtig.

(b) Bestimme den inneren Kern von $C_+[0,1]$ bezüglich $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_\infty$! (3)

Lösung: Wir zeigen, dass der innere Kern von $C_+[0,1]$ in $\mathscr{T}_\infty$ die Menge

$$\begin{aligned} K &:= \{u \in C[0,1] : u(x) > 0\ \forall x \in [0,1]\} \\ &= \{u \in C[0,1] : \exists \varepsilon > 0\ u(x) \geq \varepsilon\ \forall x \in [0,1]\} \end{aligned}$$

ist. Die Gleichheit der beiden Mengen in der Definition von K folgt aus der Tatsache, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ein Minimum annehmen.

Wir zeigen zuerst, dass K tatsächlich offen ist. Sei dazu $u \in K$ und ε wie in der Definition der Menge. Dann gilt für $v \in B_\infty(u, \frac{\varepsilon}{2})$

$$v(x) \geq u(x) - |v(x) - u(x)| \geq \varepsilon - \|v - u\|_\infty \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

für alle x, was $v \in K$ zeigt. Nach Definition ist also K offen in $\mathscr{T}_\infty$ und folglich Teilmenge des inneren Kerns von $C_+[0,1]$.

Wir zeigen nun, dass eine Funktion, die nicht in K liegt, auch nicht im inneren Kern von $C_+[0,1]$ liegen kann. Sei nun $u \notin K$. Es gebe also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein x_ε mit $u(x_\varepsilon) < \varepsilon$. Wir nehmen an, dass u im Inneren von $C_+[0,1]$ liegt, dass es also eine Umgebung U von u gibt mit $U \subset C_+[0,1]$. Nach Definition gibt es dann ein $\varrho > 0$ mit $B(u, \varrho) \subset U$. Definiere $v(x) := u(x) - \frac{\varrho}{2} \in C[0,1]$ für $x \in [0,1]$. Dann ist $\|u - v\|_\infty = \frac{\varrho}{2}$ und

$$v(x_{\varrho/2}) = u(x_{\varrho/2}) - \tfrac{\varrho}{2} < \tfrac{\varrho}{2} - \tfrac{\varrho}{2} = 0,$$

also $v \in U \setminus C_+[0,1] \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Wahl von U. Somit haben wir gezeigt, dass K das Innere von $C_+[0,1]$ bezüglich $\mathscr{T}_\infty$ ist.

Nun zeigen wir noch, dass das Innere von $C_+[0,1]$ bezüglich $\mathscr{T}_1$ leer ist. Sei dazu angemommen, es gebe ein u im Inneren von $C_+[0,1]$, insbesondere also $u \in C_+[0,1]$. Dann gibt es eine Umgebung U von u mit $U \subset C_+[0,1]$, also auch ein $\varrho > 0$ mit $B(u, \varrho) \subset C_+[0,1]$. Sei nun M eine obere Schranke von u, $\delta := \frac{\varrho}{2M}$, $\varepsilon < \frac{\varrho}{2}$ und sei χ eine stetige Funktion auf $[0,1]$ mit $0 \leq \chi(x) \leq 1$ für alle x, $\chi(0) = 0$ und $\chi(x) = 1$ für $x \geq \delta$. Setze $v(x) := \chi(x)u(x) - \varepsilon$. Dann ist $v \in C[0,1]$, $v(0) = -\varepsilon < 0$, $v(x) \leq u(x)$ für alle x und

$$\|u - v\|_1 = \int_0^1 |u(x) - (\chi(x)u(x) - \varepsilon)| \leq \int_0^1 (1 - \chi(x))u(x) + \varepsilon \leq \delta M + \varepsilon < \varrho,$$

also $v \in U \setminus C_+[0,1] \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Wahl von U. Es kann also kein Element im Inneren von $C_+[0,1]$ bezüglich $\mathscr{T}_1$ geben.

Bemerkung: Obiger Beweis, dass die offene Menge K tatsächlich alle inneren Punkte von $C_+[0,1]$ bezüglich $\mathscr{T}_\infty$ enthält, ist komplizierter als eigentlich nötig, weil wir ausschließlich mit der zweiten Definition von K gearbeitet haben, die Verwendung der anderen aber praktischer gewesen wäre. Der Vorteil des gewählten Zugangs liegt aber darin, dass sich der Beweis nahezu wörtlich auf den Raum der beschränkten Funktionen auf einer Menge Ω oder ähnliche Situationen überträgt.

Bemerkung: Ein ähnlicher Beweis zeigt, dass das Innere der Menge der nichtnegativen Funktionen in $L^p(0,1)$ mit $1 \leq p < \infty$ leer ist.