UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Dienstag, 10.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 4

11. Sei Ω ein Hausdorff-Raum, (x_n) eine Folge in Ω und $x \in \Omega$.

(a) *Haarspalter-Lemma:* Zeige, dass (x_n) genau dann gegen x konvergiert, wenn jede Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) ihrerseits wieder eine Teilfolge $(x_{n_{k_\ell}})$ besitzt, die gegen x konvergiert! (2)

Lösung: Wenn (x_n) gegen x konvergiert, so auch die Teilfolge (x_{n_k}) und daher auch jede Teilfolge $(x_{n_{k_\ell}})$.

Ist nun umgekehrt (x_n) nicht konvergent gegen x, so gibt es nach Definition eine Umgebung U von x mit der Eigenschaft, dass unendlich viele Folgenglieder von (x_n), die wir als eine Teilfolge (x_{n_k}) schreiben, nicht in U liegen. Sei nun $(x_{n_{k_\ell}})$ eine beliebige Teilfolge von (x_{n_k}). Dann gibt es eine Umgebung von x, nämlich U, mit der Eigenschaft, dass nicht alle bis auf endlich viele, genauer gesagt keines, der Folgenglieder von $(x_{n_{k_\ell}})$ in U liegen. Nach Definition konvergiert dann $(x_{n_{k_\ell}})$ nicht gegen x. Wir haben also gezeigt, dass es eine Teilfolge ohne gegen x konvergente Teilfolge gibt.

(b) Konvergiert (x_n) genau dann, wenn jede Teilfolge von (x_n) eine konvergente Teilfolge besitzt? (1)

Lösung: Im topologischen Raum $[-1, 1]$ hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß jede Folge eine konvergente Teilfolge, insbesondere also jede Teilfolge der Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da die Folge selbst nicht konvergiert, ist die Behauptung falsch.

12. Sei Ω ein Hausdorff-Raum, $A \subset \Omega$, und sei $B \coloneqq \{x \in \Omega \mid \exists (x_n) \subset A, \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$. Zeige:

(a) Es gilt $B \subset \overline{A}$. (1)

Lösung: Sei $x \in B$ und (x_n) eine Folge in A, die gegen x konvergiert. Sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \ge n_0$, also insbesondere $x_{n_0} \in U \cap A \neq \emptyset$, und laut Vorlesung ist somit $x \in \overline{A}$.

(b) Erfüllt Ω das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist $B = \overline{A}$. (2)

Lösung: Es ist nur noch $\overline{A} \subset B$ zu zeigen. Sei dazu $x \in \overline{A}$ und (B_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Dann sind auch die Mengen $C_n \coloneqq \bigcap_{k=1}^n B_k$ Umgebungen von x. Nach Konstruktion gilt $C_n \subset C_m$ für $n \ge m$.

Wegen $x \in \overline{A}$ ist laut Vorlesung $C_n \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also $x_n \in C_n \cap A$. Wir zeigen nun, dass (x_n) gegen x konvergiert. Sei dazu U eine Umgebung von x. Dann gibt es nach Definition einer Umgebungsbasis ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $C_{n_0} \subset B_{n_0} \subset U$. Also gilt $x_n \in C_n \subset C_{n_0} \subset U$ für alle $n \ge n_0$. Dies zeigt nach Definition, dass (x_n) gegen x konvergiert.

Bemerkung: Aus dem Beweis sieht man, dass man in Räumen, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, zu jedem Punkt x eine *absteigende* Umgebungsbasis findet, also eine Umgebungsbasis (C_n) mit $C_n \subset C_m$ für $n \ge m$.

13. Sei $(G, +)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0. Wir fixieren eine Topologie $\mathscr{T}$ auf G mit der Eigenschaft, dass es zu x und y aus G und $U \in \mathcal{U}(x - y)$ stets $U_1 \in \mathcal{U}(x)$

und $U_2 \in \mathcal{U}(y)$ mit $U_1 - U_2 := \{u_1 - u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \subset U$ gibt. Man nennt G dann eine *topologische Gruppe*. Zeige:

(a) Ist O offen und $x \in G$, so sind auch $x - O$, $x + O$ und $-O$ offen. (2)

Lösung: Sei O offen und $x \in G$. Um zu zeigen, dass $x - O$ offen ist, zeigen wir, dass $x - O$ eine Umgebung jedes seiner Elemente ist, also $x - O \in \mathcal{U}(x - y)$ für alle $y \in O$. Sei dazu also $y \in O$. Weil O offen ist, ist $O \in \mathcal{U}(y)$, also $O \in \mathcal{U}(x - (x - y))$. Nach Voraussetzung gibt es $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ und $U_2 \in \mathcal{U}(x - y)$ mit $U_1 - U_2 \subset O$. Insbesondere ist also $x - U_2 \subset O$ und somit $U_2 \subset x - O$. Also folgt $x - O \in \mathcal{U}(x - y)$ aus der Stabilität von Umgebungen bezüglich Obermengenbildung (Filtereigenschaft).

Als Spezialfall für $x = 0$ erhält man, dass $-O$ offen ist. Somit ist nach dem bereits Gezeigten auch $x - (-O) = x + O$ offen.

(b) Ist G separabel und besitzt 0 eine abzählbare Umgebungsbasis, so erfüllt G das zweite Abzählbarkeitsaxiom. (2)

Lösung: Sei (B_m) eine abzählbare Umgebungsbasis der 0 bestehend aus offenen Mengen und sei (x_n) eine dichte Folge in G. Wir haben im vorigen Aufgabenteil schon gesehen, dass dann alle Mengen der Form $x_n - B_m$ offen sind. Wir zeigen, dass diese abzählbar vielen Mengen sogar eine Basis der Topologie bilden.

Sei dazu O offen. Es genügt zu zeigen, dass es zu jedem $x \in O$ eine Basismenge $x_n - B_m$ mit $x \in x_n - B_m \subset O$ gibt.

Sei $x \in O$ beliebig. Wegen $x - 0 \in O$ gibt es nach Voraussetzung $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ und $U_2 \in \mathcal{U}(0)$ mit $U_1 - U_2 \subset O$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist dann $U_1 - x \in \mathcal{U}(0)$. Nach Definition einer Umgebungsbasis gibt es also ein B_m mit $B_m \subset U_1 - x$ und $B_m \subset U_2$. Nach Definition der (x_n) gibt es ein x_n mit $x_n \in x + B_m$. Dann ist

$$x \in x_n - B_m \subset x + B_m - B_m \subset x + (U_1 - x) - U_2 = U_1 - U_2 \subset O,$$

was zeigt, dass $\{x_n - B_m\}$ eine Basis ist.