Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 17.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 5

14. Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Bestimme die abgeschlossene Hülle und den inneren Kern der Menge $\mathrm{C}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen! (2)
(Schwierige) Bonusaufgabe ohne Wertung: Bestimme den Folgenabschluss von $\mathrm{C}(\mathbb{R})$!

Lösung: Wir zeigen, dass $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ dicht ist. Sei dazu $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ beliebig und $U \in \mathcal{U}(f)$. Es gibt also eine endliche Menge $\omega \subset \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B(f, \omega, \varepsilon) = \big\{ g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : |g(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in \omega \big\} \subset U.$$

Es gibt sicherlich eine stetige Funktion g mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \omega$, beispielsweise eine stückweise lineare Funktion. Dann ist $g \in B(f, \omega, \varepsilon)$ und daher $g \in U \cap \mathrm{C}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Also ist $\overline{\mathrm{C}(\mathbb{R})} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Wir zeigen, dass das Innere leer ist. Sei nämlich $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ beliebig und $U \in \mathcal{U}(f)$. Sei $B(f, \omega, \varepsilon) \subset U$. Es gibt sicherlich eine unstetige Funktion $g \in B(f, \omega, \varepsilon)$, beispielsweise eine Funktion $g \neq 0$ in $\mathcal{F}_{00}(\mathbb{R})$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \omega$. Also ist $g \in U \cap \mathrm{C}(\mathbb{R})^C \neq \emptyset$ und somit $\mathrm{C}(\mathbb{R})^c$ dicht in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, was gerade bedeutet, dass $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ leeres Inneres hat[1].

Bonus: Man kann zeigen, dass der Folgenabschluss von $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ die Menge derjenigen Funktionen ist, deren Stetigkeitsstellen in jeder nicht-leeren, perfekten[2] Menge dicht liegen. Übrigens ist der Folgenabschluss selbst nicht folgenabgeschlossen. Und selbst wenn man die Operation „Folgenabschluss“ beliebig oft iteriert (auch überabzählbar oft), erhält man nie den Gesamtraum $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, da man die Menge der borelmessbaren Funktionen nicht verlässt. Mehr Informationen hierzu findet man beispielsweise im Buch „A primer of real functions“ von Harold P. Boas in Abschnitt 18.

15. Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge. Es gebe ein $\iota_0 \in I$ mit der Eigenschaft, dass aus $\iota_0 \preceq \iota$ bereits $\iota_0 = \iota$ folgt. Ist nun Ω ein Hausdorff-Raum und $(x_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz zur Indexmenge $(I, \preceq)$ mit Werten in Ω. Zeige, dass $(x_\iota)_{\iota \in I}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert! (1)

Lösung: Wir zeigen, dass $\lim x_\iota = x_{\iota_0}$ ist. Sei nämlich $U \in \mathcal{U}(x_{\iota_0})$. Dann gilt für alle $\iota \succeq \iota_0$ nach Voraussetzung $\iota = \iota_0$ und daher insbesondere $x_\iota = x_{\iota_0} \in U$. Nach Definition heißt dies $\lim x_\iota = x_{\iota_0}$.

16. Sei $J := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x, y \in J$ sei $x \preceq_J y$ als $|x| \geq |y|$ definiert. Zeige, dass $(J, \preceq_J)$ eine gerichtete Menge ist! Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (4)

(i) $y = \lim_{x \to 0} f$ existiert, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x \in J$ mit $|x| < \delta$.

(ii) Für jedes Netz (x_ι) in J mit $\lim x_\iota = 0$ gilt $\lim f(x_\iota) = y$.

(iii) Das Netz $(J, \preceq_J) \to \mathbb{R}$, $\iota \mapsto f(\iota)$ konvergiert gegen y.

[1] Beachte: $\overline{N}^C = (N^C)^\circ$.

[2] Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ heißt *perfekt*, wenn sie mit der Menge ihrer Häufungspunkte zusammenfällt, also abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte besitzt.

Lösung: Es ist offensichtlich, dass $\preceq_J$ reflexiv und transitiv ist. Zu x und y in J kann man $k := \min\{|x|, |y|\}$ als gemeinsame obere Schranke wählen.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Sei (x_ι) ein Netz mit $\lim x_\iota = 0$. Sei $U \in \mathcal{U}(y)$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset U$ gilt. Wähle δ wie in (i). Nach Definition gibt es dann ein ι_0 mit $x_\iota \in (-\delta, \delta)$ für $\iota \succeq \iota_0$. Dann gilt aber nach Wahl von δ auch $f(x_\iota) \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset U$ für $\iota \succeq \iota_0$, was nach Definition $\lim f(x_\iota) = y$ zeigt.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“ Betrachte das Netz (x_ι) definiert durch $x_\iota := \iota$ für $\iota \in J \subset \mathbb{R}$. Wir zeigen $\lim x_\iota = 0$. Ist nämlich $U \in \mathcal{U}(0)$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset U$. Wähle $\iota_0 := \frac{\delta}{2}$. Ist nun $\iota \succeq \iota_0$, so ist $|x_\iota| = |\iota| \leq |\iota_0| < \delta$, also $x_\iota \in (-\delta, \delta) \subset U$. Nach Definition zeigt dies $\lim x_\iota = 0$. Nach Voraussetzung folgt hieraus $\lim f(x_\iota) = \lim f(\iota) = y$.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \in \mathcal{U}(y)$ gibt es nach Definition ein $\iota_0 \in J$ mit der Eigenschaft, dass $f(\iota) \in U$ für alle $\iota \in J$ mit $\iota \succeq \iota_0$ gilt. Definiere $\delta := |\iota_0|$. Ist nun $x \in J$ und $|x| < \delta$, so ist nach Definition $x \succeq \iota_0$, also nach Wahl von ι_0 auch $f(x) \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, was gerade $|f(x) - y| < \varepsilon$ bedeutet.

17. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Ein Netz $(x_\iota)_{\iota \in I}$ heißt *Cauchy-Netz*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\iota_0(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft gibt, dass $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ für alle $i \succeq \iota_0(\varepsilon)$ und $j \succeq \iota_0(\varepsilon)$ gilt. Zeige, dass (M, d) genau dann vollständig ist, wenn jedes Cauchy-Netz konvergiert! (3)
Erinnerung: Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. Eine Folge (x_n) heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft gibt, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ gilt.

Lösung: Sei jedes Cauchy-Netz konvergent. Man sieht aus der Definition sofort, dass jede Cauchy-Folge auch ein Cauchy-Netz mit zugrundeliegender gerichteter Menge $(\mathbb{N}, \leq)$ ist. Also ist jede Cauchy-Folge konvergent, was gerade bedeutet, dass M vollständig ist.

Sei nun M vollständig. Sei (x_ι) ein Cauchy-Netz. Wähle $\iota_1 := \iota_0(1)$. Nach Definition einer gerichteten Menge gibt es ι_2 mit $\iota_2 \succeq \iota_1$ und $\iota_2 \succeq \iota_0(\frac{1}{2})$. Induktiv kann man so eine Folge (ι_n) mit $\iota_n \succeq \iota_{n-1}$ und $\iota_n \succeq \iota_0(\frac{1}{n})$ definieren. Wir zeigen nun, dass die Folge $(x_{\iota_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Wähle ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon$. Sind nun $n, m \geq n_0(\varepsilon)$, so ist

$$\iota_n \succeq \iota_{n-1} \succeq \cdots \succeq \iota_{n_0(\varepsilon)} \succeq \iota_0(\tfrac{1}{n_0(\varepsilon)})$$

und ebenso $\iota_m \succeq \iota_0(\frac{1}{n_0(\varepsilon)})$. Somit ist nach Definition von $\iota_0(\frac{1}{n_0(\varepsilon)})$

$$d(x_{\iota_n}, x_{\iota_m}) < \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Wir haben nachgerechnet, dass $(x_{\iota_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Nach Voraussetzung konvergiert daher (x_{ι_n}) gegen ein $x \in M$. Wir zeigen nun $\lim x_\iota = x$. Sei dazu $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, 2\varepsilon) \subset U$. Nach Definition der Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ und $x_{\iota_{n_0}} \in B(x, \varepsilon)$. Wähle nun $\hat{\iota} := \iota_{n_0} \succeq \iota_0(\frac{1}{n_0})$. Dann gilt für jedes $\iota \succeq \hat{\iota}$ also $\iota \succeq \iota_0(\frac{1}{n_0})$ und daher

$$d(x_\iota, x) \leq d(x_\iota, x_{\iota_{n_0}}) + d(x_{\iota_{n_0}}, x) \leq \frac{1}{n_0} + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

was $x_\iota \in B(x, 2\varepsilon) \subset U$ zeigt. Wir haben also nach Definition $\lim x_\iota = x$ nachgerechnet. Also konvergiert das Netz (x_ι).