Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 24.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Übungen Elemente der Topologie: Blatt 6

18. Seien X und Y Hausdorff-Räume, $x \in X$ und f eine Funktion von X nach Y. Zeige:

(a) Ist (V_α) eine Umgebungsbasis von $f(x)$, so ist f genau dann stetig in x, wenn $f^{-1}(V_\alpha)$ für jedes α eine Umgebung von x ist. (1)

(b) Ist (B_α) eine Basis der Topologie von Y, so ist f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(B_\alpha)$ für jedes α eine offene Menge ist. (1)

(c) Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, so ist eine Funktion $g\colon M_1 \to M_2$ genau dann stetig in $x_0 \in M_1$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass mit $d_1(x, x_0) < \delta$ auch $d_2(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ gilt. (1)

19. *Stetigkeit und Folgenstetigkeit:* Seien X und Y Hausdorff-Räume. Eine Funktion f von X nach Y heißt *folgenstetig in* $x \in X$, falls für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to x$ gilt, dass $(f(x_n))$ gegen $f(x)$ konvergiert. Der Raum X erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Zeige, dass f genau dann stetig in $x \in X$ ist, wenn f in x folgenstetig ist! (2)

20. Sei Ω ein topologischer Raum. Betrachte die Topologien $\mathscr{T}_o := \{(-\infty, b) : b \in [-\infty, \infty]\}$ und $\mathscr{T}_u := \{(a, \infty) : a \in [-\infty, \infty]\}$ von $\mathbb{R}$. Sei f eine Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *von oben halbstetig* (bzw. *von unten halbstetig*), falls sie stetig von Ω nach $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_o)$ (bzw. nach $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$) ist. Hierbei heißt eine Funktion zwischen topologischen Räumen stetig, falls die Urbilder offener Mengen offen sind. Zeige:

(a) Es gibt keine Metrik, die die Topologie $\mathscr{T}_o$ induziert. (1)

(b) Die Funktion f ist genau dann stetig von Ω nach $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie, wenn sie von oben und von unten halbstetig ist. (2)

(c) Der Raum Ω erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Die Funktion f ist genau dann von oben halbstetig, wenn $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \le f(x)$ für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to x$ richtig ist. (2)