Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 24.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 6

18. Seien X und Y Hausdorff-Räume, $x \in X$ und f eine Funktion von X nach Y. Zeige:

(a) Ist (V_α) eine Umgebungsbasis von $f(x)$, so ist f genau dann stetig in x, wenn $f^{-1}(V_\alpha)$ für jedes α eine Umgebung von x ist. (1)

Lösung: Sei $x \in X$ und f stetig in x. Sei V_α ein Element der Umgebungsbasis. Laut Vorlesung gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset V_\alpha$, also $U \subset f^{-1}(V_\alpha)$. Dies zeigt $f^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{U}(x)$.

Sei nun $x \in X$ und (V_α) eine Umgebungsbasis von $f(x)$ mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(V_\alpha) \in \mathcal{U}(x)$ für alle α gilt. Sei nun $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Dann gibt es α_0 mit $V_{\alpha_0} \subset V$. Nach Voraussetzung ist also $U \coloneqq f^{-1}(V_{\alpha_0})$ in $\mathcal{U}(x)$, und nach Definition gilt $f(U) \subset V_{\alpha_0} \subset V$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass daraus die Stetigkeit von f folgt.

(b) Ist (B_α) eine Basis der Topologie von Y, so ist f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(B_\alpha)$ für jedes α eine offene Menge ist. (1)

Lösung: Ist f stetig, so sind laut Vorlesung Urbilder offener Mengen offen, insbesondere also die Mengen $f^{-1}(B_\alpha)$.

Sei nun umgekehrt $f^{-1}(B_\alpha)$ für alle α offen. Ist O in Y offen, so gibt es eine Teilfamilie (B_β) von (B_α) mit $O = \bigcup B_\beta$. Also ist $f^{-1}(O) = \bigcup f^{-1}(B_\beta)$, was nach Voraussetzung an die (B_α) und nach Definition einer Topologie zeigt, dass $f^{-1}(O)$ offen ist. Laut Vorlesung ist dann f stetig.

(c) Sind (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume, so ist eine Funktion $g\colon M_1 \to M_2$ genau dann stetig in $x_0 \in M_1$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass mit $d_1(x, x_0) < \delta$ auch $d_2(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ gilt. (1)

Lösung: Sei x_0 fest. Die ε-δ-Bedingung lässt sich wie folgt umformulieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subset g^{-1}(B(g(x_0), \varepsilon))$. Nach Definition der Topologie metrischer Räume heißt dies gerade, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $g^{-1}(B(g(x_0), \varepsilon))$ eine Umgebung von x_0 ist. Da die Kugeln um $g(x_0)$ eine Umgebungsbasis von $g(x_0)$ in M_2 bilden, ist dies nach dem ersten Aufgabenteil äquivalent zur Stetigkeit von g in x_0.

19. *Stetigkeit und Folgenstetigkeit:* Seien X und Y Hausdorff-Räume. Eine Funktion f von X nach Y heißt *folgenstetig in* $x \in X$, falls für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to x$ gilt, dass $(f(x_n))$ gegen $f(x)$ konvergiert. Der Raum X erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Zeige, dass f genau dann stetig in $x \in X$ ist, wenn f in x folgenstetig ist! (2)

Lösung: Ist f stetig in x, so gilt die Aussage in der Definition der Folgenstetigkeit sogar für beliebige Netze und somit insbesondere für Folgen.

Für die andere Richtung sei (B_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Mit dem gleichen Argument wie in Aufgabe 12 darf man $B_n \subset B_m$ für $n \geq m$ annehmen. Sei f unstetig in x. Dann gibt es nach der vorigen Aufgabe ein $V \in \mathcal{U}(f(x))$ mit $U \coloneqq f^{-1}(V) \notin \mathcal{U}(x)$. Insbesondere ist $B_n \not\subset U$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also eine Folge (x_n) mit $x_n \in B_n$ und $x_n \notin U$. Wie in Aufgabe 12 sieht man nun leicht, dass (x_n) gegen x konvergiert. Nach Wahl von (x_n) ist aber $f(x_n) \notin V$, und somit konvergiert $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x)$. Wir haben gezeigt, dass f in x nicht folgenstetig ist.

20. Sei Ω ein topologischer Raum. Betrachte die Topologien $\mathscr{T}_o := \{(-\infty, b) : b \in [-\infty, \infty]\}$ und $\mathscr{T}_u := \{(a, \infty) : a \in [-\infty, \infty]\}$ von $\mathbb{R}$. Sei f eine Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *von oben halbstetig* (bzw. *von unten halbstetig*), falls sie stetig von Ω nach $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_o)$ (bzw. nach $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_u)$) ist. Hierbei heißt eine Funktion zwischen topologischen Räumen stetig, falls die Urbilder offener Mengen offen sind. Zeige:

(a) Es gibt keine Metrik, die die Topologie $\mathscr{T}_o$ induziert. (1)

Lösung: Es ist klar, dass es keine Menge der Form $(-\infty, b)$ mit $1 \in (-\infty, b)$ und $0 \notin (-\infty, b)$ geben kann, da dazu zugleich $b > 1$ und $b \leq 0$ gelten müsste. Es gibt also keine disjunkten offenen Mengen O_0 und O_1 mit $0 \in O_0$ und $1 \in O_1$. Folglich erfüllt die Topologie das Hausdorff-Axiom nicht, kann also insbesondere nicht von einer Metrik kommen.

(b) Die Funktion f ist genau dann stetig von Ω nach $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie, wenn sie von oben und von unten halbstetig ist. (2)

Lösung: Sei f stetig bezüglich der euklidischen Topologie. Da bezüglich dieser Topologie die Mengen $(-\infty, b)$ offen sind, sind deren Urbilder laut Vorlesung offen in Ω, was nach Definition die Halbstetigkeit von oben zeigt. Analog sieht man, dass f von unten halbstetig ist.

Sei nun f von oben und von unten halbstetig. Seien $a < b$ reelle Zahlen. Dann ist

$$f^{-1}\big((a,b)\big) = f^{-1}\big((-\infty, b) \cap (a, \infty)\big) = f^{-1}\big((-\infty, b)\big) \cap f^{-1}\big((a, \infty)\big)$$

nach Voraussetzung offen in Ω. Weil die Intervalle der Form (a, b) eine Basis der euklidischen Topologie bilden, zeigt dies nach Aufgabe 18 die Stetigkeit von f bezüglich der euklidischen Topologie.

Bemerkung: Man hätte bei dieser Aufgabe auch mit Netzen argumentieren dürfen. Man sieht nämlich leicht ein, dass alle in der Vorlesung vorgestellten Charakterisierungen der Stetigkeit in beliebigen topologischen Räumen richtig bleiben und die Eindeutigkeit des Grenzwerts von Netzen keine Rolle spielt.

(c) Der Raum Ω erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom. Die Funktion f ist genau dann von oben halbstetig, wenn $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x)$ für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to x$ richtig ist. (2)

Lösung: Sei f von oben halbstetig und (x_n) eine Folge, die gegen x konvergiert. Sei $b > f(x)$. Dann ist $f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{U}(x)$. Es gibt also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq n_0$, also $f(x_n) < b$ für $n \geq n_0$. Folglich ist $\limsup f(x_n) \leq b$. Weil dies für jedes $b > f(x)$ richtig ist, folgt $\limsup f(x_n) \leq f(x)$.

Sei nun f nicht von oben halbstetig. Dann gibt es ein b, für das $U := f^{-1}((-\infty, b))$ nicht offen ist. Sei $x \in U$ so gewählt, dass $U \notin \mathcal{U}(x)$ gilt, und sei (B_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x mit $B_n \subset B_m$ für $n \geq m$. Dann ist $B_n \not\subset U$, und daher gibt es $x_n \in B_n$ mit $x_n \notin U$. Also konvergiert (x_n) gegen x, aber es gilt $f(x_n) \geq b$. Folglich ist $f(x) < b \leq \limsup f(x_n)$. Dies wollten wir zeigen.