Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 01.12.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10 + 3

Übungen Elemente der Topologie: Blatt 7

21. (a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und stetig (bezüglich der euklidischen Topologie). Zeige, dass f ein Homöomorphismus ist! (2)

(b) Zeige, dass es Hausdorff-Topologien $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ auf $\mathbb{R}$ und eine bijektive und stetige Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathscr{T}_1) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_2)$ gibt, für die f kein Homöomorphismus ist. (2)

22. Seien $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ topologische Räume und $\mathcal{B}_\alpha$ jeweils eine Basis der Topologie von X_α. Sei $X \coloneqq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ mit der Produkttopologie versehen. Zeige:

(a) Sei $x = (x_\alpha) \in X$. Eine Menge $U \subset X$ ist genau dann eine Umgebung von x, wenn es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ und $B_i \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$ gibt, für die

$$x \in \big\{y = (y_\alpha) \in X : y_{\alpha_i} \in B_i\big\} \subset U$$

erfüllt ist. (2)

(b) Sei $\beta \in I$ fest. Die Projektion π_β bildet offene Mengen auf offene Mengen ab, aber abgeschlossene nicht zwangsläufig auf abgeschlossene. (2)

23. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann ist die Einschränkung $d|_{A\times A}$ von d offenbar eine Metrik auf A. Es bezeichne $\mathscr{T}_d$ die zugehörige Topologie und $\mathscr{T}_r$ die relative Topologie von A bezüglich M; man nennt $\mathscr{T}_r$ auch die *Spurtopologie*. Zeige $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_r$! (2)

24. **Bonusaufgabe:** Sei B eine wohlgeordnete Menge, $A \subset B$ und $f\colon A \to B$ monoton wachsend und bijektiv. Die Menge A sei ein *Initialsegment* von B; das bedeutet, dass für x und y aus B mit $y \in A$ und $x \le y$ gilt, dass auch x in A liegt. Zeige, dass dann $A = B$ ist und $f(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha \in A$ gilt! (+3)