Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 08.12.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka

Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Übungen Elemente der Topologie: Blatt 8

25. Seien X und Y Hausdorff-Räume und A und B Teilmengen von X mit $A \cup B = X$. Seien $f_A\colon A \to Y$ und $f_B\colon B \to Y$ stetige Funktionen (bezüglich der Spurtopologie) mit $f_A(x) = f_B(x)$ für $x \in A \cap B$. Dann gibt es genau eine Funktion $f\colon X \to Y$, die auf A mit f_A und auf B mit f_B übereinstimmt. Finde zu folgenden Behauptungen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

(a) Sind A und B offen, so ist f stetig. (1)

(b) Sind A und B abgeschlossen, so ist f stetig. (1)

(c) Ist A offen und B abgeschlossen, so ist f stetig. (1)

(d) Ist $A \cap B = \emptyset$, so ist f stetig. (1)

26. Sei X ein Hausdorff-Raum, Y eine nicht-leere Menge, $q\colon X \to Y$ eine Funktion und $\mathscr{T}_q := \{O \subset Y : q^{-1}(O) \text{ ist offen}\}$.

(a) Zeige, dass $\mathscr{T}_q$ eine Topologie auf Y ist! (1)

(b) Sei $\operatorname{Rg} q := \{q(x) : x \in X\}$. Bestimme die Spurtopologie von $\mathscr{T}_q$ auf $Y \setminus \operatorname{Rg} q$! (1)

(c) Sei q injektiv. Zeige, dass $\mathscr{T}_q$ dann eine Hausdorff-Topologie ist! (1)

(d) Zeige, dass $\mathscr{T}_q$ die feinste Topologie ist, bezüglich der q stetig wird! (1)

(e) Sei Z ein topologischer Raum. Zeige, dass eine Funktion $f\colon Y \to Z$ genau dann stetig ist, wenn $f \circ q\colon X \to Z$ stetig ist! (1)

(f) Wie sieht $\mathscr{T}_q$ für eine konstante Funktion q aus? (1)