Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 8

25. Seien X und Y Hausdorff-Räume und A und B Teilmengen von X mit $A \cup B = X$. Seien $f_A : A \to Y$ und $f_B : B \to Y$ stetige Funktionen (bezüglich der Spurtopologie) mit $f_A(x) = f_B(x)$ für $x \in A \cap B$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : X \to Y$, die auf A mit f_A und auf B mit f_B übereinstimmt. Finde zu folgenden Behauptungen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

(a) Sind A und B offen, so ist f stetig. (1)

Lösung: Sei O offen in Y. Dann sind $f_A^{-1}(O)$ und $f_B^{-1}(O)$ offen in der jeweiligen Spurtopologie. Weil A und B offene Mengen sind, sind die Mengen laut Vorlesung sogar offen in X. Also ist $f^{-1}(O) = f_A^{-1}(O) \cup f_B^{-1}(O)$ eine offene Menge. Wir haben gezeigt, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Folglich ist f stetig.

(b) Sind A und B abgeschlossen, so ist f stetig. (1)

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Sei F abgeschlossen in Y. Dann sind $f_A^{-1}(F)$ und $f_B^{-1}(F)$ abgeschlossen in der jeweiligen Spurtopologie. Weil A und B abgeschlossene Mengen sind, sind die Mengen laut Vorlesung sogar abgeschlossen in X. Also ist $f^{-1}(F) = f_A^{-1}(F) \cup f_B^{-1}(F)$ eine abgeschlossene Menge. Wir haben gezeigt, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Folglich ist f stetig.

(c) Ist A offen und B abgeschlossen, so ist f stetig. (1)

Lösung: Als Gegenbeispiel in $\mathbb{R}$ für diese und die folgende Teilaufgabe kann man $A = (-\infty, 0)$ und $B = [0, \infty)$ mit den konstanten Funktionen $f_A \coloneqq 1$ und $f_B \coloneqq 0$ wählen.

(d) Ist $A \cap B = \emptyset$, so ist f stetig. (1)

Lösung: Siehe vorige Teilaufgabe.

26. Sei X ein Hausdorff-Raum, Y eine nicht-leere Menge, $q : X \to Y$ eine Funktion und $\mathscr{T}_q \coloneqq \{O \subset Y : q^{-1}(O) \text{ ist offen}\}$.

(a) Zeige, dass $\mathscr{T}_q$ eine Topologie auf Y ist! (1)

Lösung: Wegen $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $q^{-1}(Y) = X$ liegen $\emptyset$ und Y in $\mathscr{T}_q$. Sind O_α in $\mathscr{T}_q$ und $O \coloneqq \bigcup O_\alpha$, so ist $q^{-1}(O) = \bigcup q^{-1}(O_\alpha)$ offen in X, also $O \in \mathscr{T}_q$. Since O_i in $\mathscr{T}_q$ und $O \coloneqq \bigcap O_i$, so ist $q^{-1}(O) = \bigcap q^{-1}(O_i)$ offen in X, also $O \in \mathscr{T}_q$. Folglich ist $\mathscr{T}_q$ eine Topologie.

(b) Sei $\operatorname{Rg} q \coloneqq \{q(x) : x \in X\}$. Bestimme die Spurtopologie von $\mathscr{T}_q$ auf $Y \setminus \operatorname{Rg} q$! (1)

Lösung: Sei $Y_0 \coloneqq Y \setminus \operatorname{Rg} q$. Sei A eine Teilmenge von Y_0. Dann ist A wegen $q^{-1}(A) = \emptyset$ offen in Y und somit insbesondere relativ offen in Y_0. Folglich ist die Spurtopologie auf Y_0 die diskrete Topologie.

(c) Sei q injektiv. Zeige, dass $\mathscr{T}_q$ dann eine Hausdorff-Topologie ist! (1)

Lösung: Sei q injektiv. Wir werden benutzen, dass dann $q^{-1}(q(A)) = A$ für jede Menge $A \subset X$ gilt.

Seien $y_1 \neq y_2$ Elemente von Y. Ist y_1 nicht in $\operatorname{Rg} q$, so sind $O_1 \coloneqq \{y_1\}$ und $O_2 \coloneqq Y \setminus \{y_1\}$ wegen $q^{-1}(O_1) = \emptyset$ und $q^{-1}(O_2) = X$ offen in Y, und nach Definition gilt $y_1 \in O_1$, $y_2 \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Analog findet man trennende offene Mengen, falls y_2 nicht in $\operatorname{Rg} q$ liegt.

Seien nun also y_1 und y_2 beide in $\operatorname{Rg} q$. Dann gibt es x_1 und x_2 in X mit $q(x_1) = y_1$ und $q(x_2) = y_2$, und natürlich ist dann $x_1 \neq x_2$. Es gibt also offene Mengen U_1 und U_2 mit $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Definiere $O_1 \coloneqq q(U_1)$ und $O_2 \coloneqq q(U_2)$. Dann sind O_1 und O_2 wegen $q^{-1}(O_1) = U_1$ und $q^{-1}(O_2) = U_2$ offen in Y. Weil q injektiv ist, gilt $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, denn anderenfalls gäbe es $a_1 \in U_1$ und $a_2 \in U_2$ mit $q(a_1) = q(a_2)$. Zudem ist nach Definition $y_1 \in O_1$ und $y_2 \in O_2$.

Wir haben also in allen Fällen trennende offene Mengen gefunden. Damit ist die Hausdorff-Eigenschaft bewiesen.

(d) Zeige, dass $\mathscr{T}_q$ die feinste Topologie ist, bezüglich der q stetig wird! (1)

Lösung: Offenbar ist q stetig bezüglich $\mathscr{T}_q$, da Urbilder offener Mengen nach Definition offen sind.

Sei nun $\mathscr{T}$ eine weitere Topologie, bezüglich der q stetig ist. Ist $O \in \mathscr{T}$, so ist $q^{-1}(O)$ offen in X, also nach Definition $O \in \mathscr{T}_q$. Folglich gilt $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_q$ für jede solche Topologie, was gerade heißt, dass $\mathscr{T}_q$ die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft ist.

(e) Sei Z ein topologischer Raum. Zeige, dass eine Funktion $f\colon Y \to Z$ genau dann stetig ist, wenn $f \circ q\colon X \to Z$ stetig ist! (1)

Lösung: Ist f stetig, so auch die Komposition $f \circ q$, da ja auch q stetig ist.

Sei nun $f \circ q$ stetig. Ist $O \subset Z$ offen, so ist $(f \circ q)^{-1}(O) = q^{-1}(f^{-1}(O))$ offen in X, was nach Definition heißt, dass $f^{-1}(O)$ in Y offen ist. Also ist f stetig.

(f) Wie sieht $\mathscr{T}_q$ für eine konstante Funktion q aus? (1)

Lösung: Ist q konstant, so ist $q^{-1}(A) \in \{\emptyset, X\}$ für jedes $A \subset Y$, also insbesondere offen in X. Folglich ist in diesem Fall jede Teilmenge von Y offen, $\mathscr{T}_q$ also die diskrete Topologie.