Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 10

31. Sei X ein Hausdorff-Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeige, dass jede abzählbar kompakte Teilmenge von X folgenkompakt ist! (2)

Lösung: Sei K abzählbar kompakt und (x_n) eine Folge in K. Laut Vorlesung besitzt (x_n) dann einen Häufungswert $x \in K$. Sei (B_k) eine Umgebungsbasis von x mit $B_{k+1} \subset B_k$. Nach Definition eines Häufungswerts gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_1} \in B_1$, ein $n_2 > n_1$ mit $x_{n_2} \in B_2$ und so weiter. Induktiv finden wir so eine Teilfolge (n_k) mit $n_{k+1} > n_k$ und $x_{n_k} \in B_k$. Weil (B_k) eine Umgebungsbasis von x ist, folgt hieraus, dass x_{n_k} gegen x konvergiert.

Wir haben gezeigt, dass jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt. Also ist K folgenkompakt.

32. Sei $(X, \mathscr{T}_1)$ ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathscr{T}_2$ eine weitere Hausdorff-Topologie auf X mit $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$. Zeige, dass $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$ gilt! (2)

Lösung: Die Funktion $f\colon (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ mit $f(x) \coloneqq x$ für $x \in X$ ist stetig, da wegen $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ Urbilder offener Mengen offen sind. Weil $(X, \mathscr{T}_1)$ kompakt ist, ist f somit nach Vorlesung ein Homöomorphismus, was gerade bedeutet, dass Bilder offener Mengen offen sind. Ist also $O \in \mathscr{T}_1$, so ist $O = f(O) \in \mathscr{T}_2$, was $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ zeigt. Folglich ist $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

33. Sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt ist! Stimmt die Aussage auch, wenn man „kompakt“ durch „abzählbar kompakt“ oder durch „folgenkompakt“ ersetzt? (2)

Lösung: Seien $(K_k)_{k=1}^n$ kompakte Mengen, und sei $K \coloneqq \bigcup_{k=1}^n K_k$. Sei $(O_\alpha)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann überdeckt $(O_\alpha)_{i \in I}$ insbesondere jede der Mengen K_k. Es gibt also für jedes k eine endliche Menge I_k mit $K_k \subset \bigcup_{\alpha \in I_k} O_\alpha$. Für die endliche Menge $I_0 \coloneqq \bigcup_{k=1}^n I_k$ gilt dann $K_k \subset \bigcup_{\alpha \in I_0} O_\alpha$ für alle k, also $K \subset \bigcup_{\alpha \in I_0} O_\alpha$. Wir haben gezeigt, dass jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Also ist K kompakt.

Das gleiche Argument zeigt, dass die endliche Vereinigung abzählbar kompakter Mengen abzählbar kompakt ist; man muss im Beweis lediglich I als abzählbar voraussetzen.

Seien nun $(K_k)_{k=1}^n$ folgenkompakte Mengen und $K \coloneqq \bigcup_{k=1}^n K_k$. Sei (x_i) eine Folge in K. Dann gibt es ein k_0 mit der Eigenschaft, dass unendlich viele Folgenglieder von (x_i) in K_{k_0} liegen. Diese Teilfolge von (x_i) besitzt wegen Folgenkompaktheit von K_{k_0} eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $K_{k_0} \subset K$. Also besitzt die ursprüngliche Folge eine in K konvergente Teilfolge. Wir haben gezeigt, dass K folgenkompakt ist.

34. Sei $(J, \preceq)$ eine gerichtete Menge, und seien A und B Teilmengen von J mit $J = A \cup B$. Zeige:

(a) Mindestens eine der Mengen A und B ist bezüglich $\preceq$ eine gerichtete Menge. (2)

Lösung: Natürlich ist $\preceq$ auch auf A und B eine reflexive und transitive Relation. Ist A gerichtet, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also A nicht gerichtet. Dann gibt es i_0 und j_0 aus A mit der Eigenschaft, dass es kein k aus A mit $k \succeq i_0$ und $k \succeq j_0$ gibt. Sei nun $k_0 \in J$ so gewählt, dass $k_0 \succeq i_0$ und $k_0 \succeq j_0$ gilt.

Sind i und j beliebige Elemente in B, so gibt es nach Definition einer gerichteten Menge ein k in J mit $k \succeq i$ und $k \succeq j$ und $k \succeq k_0$. Insbesondere ist $k \succeq i_0$ und $k \succeq j_0$. Also kann k nach Wahl von i_0 und j_0 nicht in A liegen, woraus $k \in B$ folgt. Wir haben also zu je zwei Elementen aus B eine obere Schranke gefunden, was zeigt, dass B eine gerichtete Menge ist.

Bemerkung: Wir haben sogar Folgendes gesehen: Ist A nicht gerichtet, so gibt es ein k_0 in J mit der Eigenschaft, dass jedes k aus J mit $k \succeq k_0$ bereits in B liegt.

(b) Sei $(x_\iota)_{\iota \in J}$ ein Netz mit Werten in einem Hausdorff-Raum X und $x \in X$. Falls $(A, \preceq)$ gerichtet ist, konvergiere $(x_\iota)_{\iota \in A}$ gegen x. Falls $(B, \preceq)$ gerichtet ist, konvergiere $(x_\iota)_{\iota \in B}$ gegen x. Dann konvergiert $(x_\iota)_{\iota \in J}$ gegen x. (2)

Lösung: Wir betrachten zuerst den Fall, dass beide Mengen gerichtet sind. Sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es ein ι_A in A mit $x_\iota \in U$ für alle $\iota \in A$ mit $\iota \succeq \iota_A$, und es gibt ein ι_B in B mit $x_\iota \in U$ für alle $\iota \in B$ mit $\iota \succeq \iota_B$. Sei ι_0 in J so gewählt, dass $\iota_0 \succeq \iota_A$ und $\iota_0 \succeq \iota_B$ gilt. Ist nun $\iota \in J$ mit $\iota \succeq \iota_0$, so folgt im Fall $\iota \in A$ aus $\iota \succeq \iota_A$, dass $x_\iota \in U$ gilt. Ist hingegen $\iota \in B$, so folgt $x_\iota \in U$ aus $\iota \succeq \iota_B$. Insgesamt ist also $x_\iota \in U$ für alle $\iota \in J$ mit $\iota \succeq \iota_0$. Weil U eine beliebige Umgebung von x war, zeigt dies, dass $(x_\iota)_{\iota \in J}$ gegen x konvergiert.

Sei nun eine der beiden Mengen nicht gerichtet, und ohne Einschränkung sei dies A. Dann ist nach dem vorigen Aufgabenteil B gerichtet und somit nach Voraussetzung $(x_\iota)_{\iota \in B}$ konvergent gegen x. Sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es also $\iota_0 \in B$ mit $x_\iota \in U$ für alle $\iota \in B$ mit $\iota \succeq \iota_0$. Sei k_0 wie in der Bemerkung zum vorigen Aufgabenteil, und sei ι_1 so gewählt, dass $\iota_1 \succeq k_0$ und $\iota_1 \succeq \iota_0$ gilt. Ist nun ι in J mit $\iota \succeq \iota_1$, so ist $\iota \succeq k_0$ und somit $\iota \in B$. Weil zudem $\iota \succeq \iota_0$ gilt, ist dann nach Wahl von ι_0 auch $x_\iota \in U$. Wir haben also $x_\iota \in U$ für alle ι in J mit $\iota \succeq \iota_1$ gezeigt. Weil U eine beliebige Umgebung von x war, zeigt dies, dass $(x_\iota)_{\iota \in J}$ gegen x konvergiert.