Universität Ulm

Dienstag, 19.01.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Elemente der Topologie: Blatt 11

35. Sei X ein Hausdorff-Raum, (M, d) ein metrischer Raum, $f\colon X \to M$ eine Funktion und $S(f)$ die Menge der Punkte in X, in denen f stetig ist. Zeige:

(a) $S(f) = \{x_0 \in X \mid \forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \mathcal{U}(x_0)\ \forall x, y \in U\ \ d(f(x), f(y)) < \varepsilon\}$. (1)

(b) Es gibt eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Teilmengen von X mit $S(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. (2)

36. Sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Teilmengen von $\mathbb{R}^N$. Zeige:

(a) Es gibt Mengen $A_n \subset \mathbb{R}^N$ mit $A_n \cap O_n = \emptyset$ und $\partial A_n = O_n^c$. (2)
Tipp: Wähle eine abzählbare, dichte Teilmenge von O_n^c.

(b) Die Vorschrift $f(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}\,\mathbb{1}_{A_n}(x)$ definiert eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit $S(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, wobei $S(f)$ wieder die Stetigkeitsstellen von f bezeichne. (2)

37. Zeige:

(a) Es gibt eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die genau in den irrationalen Zahlen stetig ist. (1)

(b) Es gibt keine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die genau in den rationalen Zahlen stetig ist. (2)
Tipp: Satz von Baire.