Universität Ulm

Dienstag, 19.01.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 11

35. Sei X ein Hausdorff-Raum, (M,d) ein metrischer Raum, $f\colon X \to M$ eine Funktion und $S(f)$ die Menge der Punkte in X, in denen f stetig ist. Zeige:

(a) $S(f) = \{x_0 \in X \mid \forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \mathcal{U}(x_0)\ \forall x, y \in U\ \ d(f(x), f(y)) < \varepsilon\}$. (1)

Lösung: „$\subset$" Sei $x_0 \in S(f)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $U := f^{-1}\big(B(f(x_0), \frac{\varepsilon}{2})\big)$ in $\mathcal{U}(x_0)$. Für x und y in U gilt dann

$$d(f(x), f(y)) \le d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), f(y)) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

„$\supset$" Sei x_0 in X so, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $U_\varepsilon \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für $x, y \in U_\varepsilon$ gibt. Dann ist insbesondere $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für $x \in U_\varepsilon$, also $U_\varepsilon \subset f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$ und somit $f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big)$ eine Umgebung von x_0 für jedes $\varepsilon > 0$. Nach Aufgabe 18 (a) folgt daraus, dass f in x_0 stetig ist.

(b) Es gibt eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Teilmengen von X mit $S(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. (2)

Lösung: Sei $O_n := \{x_0 \in X : \exists U \in \mathcal{U}(x_0)\ \forall x, y \in U\ \ d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}\}$. Offenbar ist $S(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$; beachte hierbei auch $O_n \subset O_m$ für $n \ge m$. Es genügt also zu zeigen, dass O_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen ist.

Sei dazu $x_0 \in O_n$ und $U \in \mathcal{U}(x_0)$ wie in der Definition von O_n. Dann gibt es eine offene Menge B in X mit $x_0 \in B \subset U$. Es gilt natürlich $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}$ insbesondere für alle $x, y \in B$. Weil aber $B \in \mathcal{B}(x)$ für jedes $x \in B$ richtig ist, heißt dies nach Definition $B \subset O_n$. Also ist $O_n \in \mathcal{U}(x_0)$. Weil dies für jedes $x_0 \in O_n$ richtig ist, ist O offen.

36. Sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener Teilmengen von $\mathbb{R}^N$. Zeige:

(a) Es gibt Mengen $A_n \subset \mathbb{R}^N$ mit $A_n \cap O_n = \emptyset$ und $\partial A_n = O_n^c$. (2)
Tipp: Wähle eine abzählbare, dichte Teilmenge von O_n^c.

Lösung: Als Teilraum eines separablen metrischen Raums ist O_n^c separabel. Es gibt also eine abzählbare Teilmenge A_n von O_n^c, die in der relativen Topologie dicht liegt. Da aber O_n^c abgeschlossen ist, ist $O_n^c = \overline{A}_n$. Da A_n höchstens abzählbar ist, kann diese Menge keine offene Kugel von $\mathbb{R}^N$ enthalten und besitzt somit keine inneren Punkte. Daraus folgt $\partial A_n = \overline{A}_n \setminus (A_n)^\circ = O_n^c$.

(b) Die Vorschrift $f(x) := \sum_{n=1}^\infty 4^{-n}\, \mathbb{1}_{A_n}(x)$ definiert eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit $S(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, wobei $S(f)$ wieder die Stetigkeitsstellen von f bezeichne. (2)

Lösung: Die Summanden der Reihe sind für jedes x durch 4^{-n} majorisiert. Also konvergiert die Reihe (sogar absolut) gegen einen Grenzwert $f(x)$. Es ist nur noch $S(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ zu zeigen.

Sei zuerst $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Wir müssen zeigen, dass f in x_0 stetig ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=n_0}^\infty 4^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Die Menge $U := \bigcap_{n=1}^{n_0} O_n$ ist offen und enthält x_0, ist also eine Umgebung von x_0. Für $x \in U$ gilt nach Definition von f wegen $A_n \cap U = \emptyset$ $(n = 1, \dots, n_0)$

$$|f(x) - f(x_0)| = \Big| \sum_{n=n_0+1}^\infty 4^{-n}\, \mathbb{1}_{A_n}(x) - \sum_{n=n_0+1}^\infty 4^{-n}\, \mathbb{1}_{A_n}(x_0) \Big| \le 2 \sum_{n=n_0+1}^\infty 4^{-n} < \varepsilon.$$

Also ist f stetig in x_0. Wir haben $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \subset S(f)$ gezeigt.

Sei nun $x_0 \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_0 \notin O_{n_0}$. Wählt man n_0 minimal, so ist $x_0 \in O_n$ für $n < n_0$. Nach Wahl der A_n gilt $x_0 \in \partial A_{n_0}$. Es gibt also Folgen (x_k) in A_{n_0} und (y_k) in $A_{n_0}^c$, die jeweils gegen x_0 konvergieren. Für hinreichend große Werte von k ist x_k und y_k in $\bigcap_{n=1}^{n_0-1} O_n$, also $x_k, y_k \notin A_n$ für $n < n_0$. Für solche k gilt

$$|f(x_k)-f(y_k)| = \Big|\sum_{n=n_0}^{\infty} 4^{-n}\,\mathbb{1}_{A_n}(x_k) - \sum_{n=n_0}^{\infty} 4^{-n}\,\mathbb{1}_{A_n}(y_k)\Big| \geq 4^{-n_0} - 2\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{-n} = \frac{4^{-n_0}}{3}.$$

Insbesondere konvergieren die Folgen $(f(x_k))$ und $(f(y_k))$ nicht gegen den gleichen Grenzwert (falls sie überhaupt konvergieren), was zeigt, dass f in x_0 nicht stetig ist. Wir haben $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n)^c \subset S(f)^c$, also $S(f) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, gezeigt.

37. Zeige:

(a) Es gibt eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die genau in den irrationalen Zahlen stetig ist. (1)

Lösung: Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Dann ist jede der Mengen $O_n := \mathbb{R}\setminus\{q_n\}$ offen. Es folgt aus Aufgabe 36, dass es eine Funktion gibt, die genau in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \mathbb{Q}^c$ stetig ist.

(b) Es gibt keine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die genau in den rationalen Zahlen stetig ist. (2)
Tipp: Satz von Baire.

Lösung: Nehmen wir, es gäbe eine solche Funktion f. Nach Aufgabe 35 gibt es dann eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen in $\mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \mathbb{Q}$. Da jede dieser Mengen $\mathbb{Q}$ enthält, sind alle diese Mengen dicht in $\mathbb{R}$.

Betrachtet man wie zuvor $U_n := \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ für eine Abzählung $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{Q}$, so ist U_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen und dicht in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz von Baire muss dann auch der abzählbare Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$ dicht in $\mathbb{R}$ sein, was nicht der Fall ist.

Also war die Annahme widersprüchlich, dass eine solche Funktion existiert.