Universität Ulm

Dienstag, 26.01.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 12

Die Aufgaben dieses Blattes sind allesamt Bonusaufgaben: Die erreichten Punkte werden angerechnet, aber bei der Bestimmung der 50%-Hürde nicht berücksichtigt.
Es besteht hiermit also die Gelegenheit, Punkte aufzuholen, sollte man aktuell unter der Hälfte der Punkte liegen.

38. Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Es sei $(\hat{M}_i, \hat{d}_i)$ eine Vervollständigung von (M_i, d_i), also $(\hat{M}_i, \hat{d}_i)$ vollständig und $\Phi_i : (M_i, d_i) \to (\hat{M}_i, \hat{d}_i)$ isometrisch mit dichtem Bild. Sei zudem f eine Funktion von M_1 nach M_2 mit der Eigenschaft, dass für jede Cauchy-Folge (x_n) in M_1 die Folge $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge in M_2 ist. Zeige:

(a) Es gibt genau eine Funktion $\hat{f} : \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$, bei der

$$\hat{f}(\lim_{n\to\infty} \Phi_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \Phi_2(f(x_n))$$

für jede Cauchy-Folge (x_n) in M_1 gilt. Diese erfüllt $\hat{f} \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ f$. (3)

Lösung: Ist (x_n) eine Cauchy-Folge in M_1, so ist nach Voraussetzung $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge in M_2. Wegen Isometrie sind also die Folgen $(\Phi_1(x_n))$ und $(\Phi_2(f(x_n)))$ Cauchy-Folgen und somit konvergent. Dies zeigt, dass die auftretenden Ausdrücke in der Bedingung an f überhaupt definiert sind.

Zu jedem $\hat{x} \in \hat{M}_1$ fixieren wir eine Folge $(x_n(\hat{x}))$ in M_1 mit $\Phi_1(x_n(\hat{x})) \to \hat{x}$. Dann ist $(\Phi_1(x_n(\hat{x})))$ eine Cauchy-Folge in $\hat{M}_1$. Weil Φ_1 isometrisch ist, ist $(x_n(\hat{x}))$ eine Cauchy-Folge in M_1. Nach Voraussetzung ist dann $(f(x_n(\hat{x})))$ eine Cauchy-Folge in M_2. Weil Φ_2 isometrisch ist, ist daher $(\Phi_2(f(x_n(\hat{x}))))$ eine Cauchy-Folge in $\hat{M}_2$ und somit konvergent gegen ein $\hat{y}(\hat{x})$. Zusammengefasst gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_1(x_n(\hat{x})) = \hat{x} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \Phi_2(f(x_n(\hat{x}))) = \hat{y}(\hat{x})$$

für die Cauchy-Folge $(x_n(\hat{x}))$ in M_1.

Dies zeigt die Eindeutigkeit von $\hat{f}$. Genauer gesagt muss jedes $\hat{f}$ mit der geforderten Eigenschaft die Vorschrift $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{y}(\hat{x})$ erfüllen.

Für die Existenz muss gezeigt werden, dass $\hat{f}(\hat{x}) := \hat{y}(\hat{x})$ eine Funktion $\hat{f}$ definiert, die die Behauptung erfüllt. Sei dazu (x_n) eine Cauchy-Folge in M. Dann ist $(\Phi_1(x_n))$ eine Cauchy-Folge in $\hat{M}_1$ und daher konvergent gegen ein $\hat{x}$. Also konvergiert für

$$\bar{x}_n := \begin{cases} x_{n/2}, & n \text{ gerade,} \\ x_{(n+1)/2}(\hat{x}), & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

auch $(\Phi_1(\bar{x}_n))$ gegen $\hat{x}$. Daher ist $(\bar{x}_n)$ eine Cauchy-Folge in M_1. Folglich konvergiert $(\Phi_2(f(\bar{x}_n)))$ in $\hat{M}_2$. Da diese Folge entlang der ungeraden Indizes nach Definition gegen $\hat{y}(\hat{x}) = \Phi(\hat{x})$ konvergiert, konvergiert $(\Phi_2(f(x_n)))$ gegen $\Phi(\hat{x})$. Das war zu zeigen.

Ist $\hat{f}$ die Funktion mit der geforderten Eigenschaft, so gilt mit $x \in M_1$ insbesondere für die konstante Folge (x_n), $x_n := x$ die Identität $\lim_{n\to\infty} \hat{f}(\Phi_1(x)) = \lim_{n\to\infty} \Phi_2(f(x))$. Dies zeigt $\hat{f} \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ f$.

(b) Sei $(\hat{x}_n)$ eine konvergente Folge in $\hat{M}_1$ mit Grenzwert $\hat{x}$. Dann gibt es eine Folge (x_n) in M_1 mit $\hat{d}_1(\Phi_1(x_n), \hat{x}_n) \to 0$ und $\hat{d}_2(\Phi_2(f(x_n)), \hat{f}(\hat{x}_n)) \to 0$. In diesem Fall ist (x_n) eine Cauchy-Folge in M_1 und es gilt $\lim_{n\to\infty} \Phi_1(x_n) = \hat{x}$. (2)

Lösung: Zu jedem $\hat{x}_n$ gibt es eine Folge $(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ in M_1 mit der Eigenschaft $\lim_{m\to\infty} \Phi_1(x_{n,m}) = \hat{x}_n$. Dann ist $(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M_1. Somit konvergiert $(\Phi_2(f(x_{n,m})))_{m\in\mathbb{N}}$ nach Definition von $\hat{f}$ gegen $\hat{f}(\hat{x}_n)$. Wählt man $m = m(n)$ groß genug, kann man also

$$\hat{d}_1(\Phi_1(x_{n,m(n)}), \hat{x}_n) < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \hat{d}_2(\Phi_2(f(x_{n,m(n)})), \hat{f}(\hat{x}_n)) < \frac{1}{n}$$

erreichen. Also sind die ersten Bedingungen mit $x_n := x_{n,m(n)}$ erfüllt. Sind diese Bedingungen für (x_n) erfüllt, so folgt

$$\hat{d}_1(\Phi_1(x_n), \hat{x}) \le \hat{d}_1(\Phi_1(x_n), \hat{x}_n) + \hat{d}_1(\hat{x}_n, \hat{x}) \to 0,$$

also $\lim_{n\to\infty} \Phi_1(x_n) = \hat{x}$. Insbesondere ist in diesem Fall $(\Phi_1(x_n))$ eine Cauchy-Folge in $\hat{M}_1$ und somit wegen Isometrie (x_n) eine Cauchy-Folge in M_1.

(c) Die Funktion $\hat{f}$ ist stetig auf $\hat{M}_1$. (1)

Lösung: Da die Räume metrisch sind, müssen wir nur nachweisen, dass $\hat{f}$ folgenstetig ist. Sei dazu $(\hat{x}_n)$ eine Folge in $\hat{M}_1$, die gegen ein $\hat{x}$ konvergiert. Wähle nun (x_n) wie im vorherigen Aufgabenteil. Dann folgt nach Definition von $\hat{f}$ direkt $\lim_{n\to\infty} \Phi_2(f(x_n)) = \hat{f}(\hat{x})$. Daher ist

$$\hat{d}_2(\hat{f}(\hat{x}_n), \hat{f}(\hat{x})) \le \hat{d}_2(\hat{f}(\hat{x}_n), \Phi_2(f(x_n))) + \hat{d}_2(\Phi_2(f(x_n)), \hat{f}(\hat{x})) \to 0,$$

da der erste Summand nach Wahl von (x_n) gegen 0 geht. Wir haben $\hat{f}(\hat{x}_n) \to \hat{f}(\hat{x})$ gezeigt, also dass f folgenstetig ist.

(d) Ist f isometrisch, so ist auch $\hat{f}$ isometrisch. (1)

Lösung: Seien $\hat{x}$ und $\hat{y}$ in $\hat{M}_1$. Dann gibt es wie in den vorigen Aufgabenteilen Cauchy-Folgen (x_n) und (y_n) in M_1 mit $\lim_{n\to\infty} \Phi_1(x_n) = \hat{x}$ und $\lim_{n\to\infty} \Phi_1(y_n) = \hat{y}$. Dann ist nach Definition von $\hat{f}$, wegen Stetigkeit der Metrik und weil f, Φ_1 und Φ_2 Isometrien sind

$$\begin{aligned}\hat{d}_2(\hat{f}(\hat{x}), \hat{f}(\hat{y})) &= \lim_{n\to\infty} \hat{d}_2(\Phi_2(f(x_n)), \Phi_2(f(y_n))) = \lim_{n\to\infty} d_2(f(x_n), f(y_n))\\ &= \lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{d}_1(\Phi_1(x_n), \Phi_2(y_n)) = \hat{d}_1(\hat{x}, \hat{y}).\end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\hat{f}$ isometrisch ist.

39. Sei M eine Menge und seien d_1 und d_2 Metriken auf M mit der Eigenschaft, dass eine Folge (x_n) in M genau dann eine Cauchy-Folge bezüglich d_1 ist, wenn (x_n) eine Cauchy-Folge bezüglich d_2 ist. Sei $(\hat{M}_i, \hat{d}_i)$ eine Vervollständigung von (M, d_i) im Sinne der vorigen Aufgabe. Zeige:

(a) Es gibt genau einen Homöomorphismus $\Phi\colon \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ mit $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$. (2)

Lösung: Zuerst zeigen wir die Eindeutigkeit. Sei dazu $\Phi\colon \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ stetig mit $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$ und sei $\hat{x} \in \hat{M}_1$. Dann gibt es eine Folge (x_n) in M_1 mit $\Phi_1(x_n) \to \hat{x}$. Mit dieser gilt

$$\Phi(\hat{x}) = \lim_{n\to\infty} (\Phi \circ \Phi_1)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi_2(x_n).$$

Über diese Vorschrift ist also Φ für jedes $\hat{x}$ eindeutig festgelegt.

Für die Existenz definieren wir $f\colon (M, d_1) \to (M, d_2)$ durch $f(x) := x$ für $x \in M$, also $f := \mathrm{id}_M$. Dann bildet f nach Voraussetzung Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen ab. Es gibt nach der vorigen Aufgabe eine stetige Funktion $\hat{f}\colon \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$

mit $\hat{f} \circ \Phi_1 = \Phi_2$. Vertauscht man die Rollen von $\hat{M}_1$ und $\hat{M}_2$, findet man eine stetige Funktion $\hat{g}\colon \hat{M}_2 \to \hat{M}_1$ mit $\hat{g} \circ \Phi_2 = \Phi_1$. Also ist $\hat{f} \circ \hat{g} \circ \Phi_2 = \Phi_2$ und $\hat{g} \circ \hat{f} \circ \Phi_1 = \Phi_1$. Anders formuliert ist $\hat{f} \circ \hat{g} = \mathrm{id}_{\hat{M}_2}$ auf $\Phi_2(M)$ und $\hat{g} \circ \hat{f} = \mathrm{id}_{\hat{M}_1}$ auf $\Phi_1(M)$. Weil stetige Funktionen, die auf einer dichten Menge übereinstimmen, überall übereinstimmen, wie beispielsweise obiger Eindeutigkeitsbeweis zeigt, ergibt sich $\hat{f} \circ \hat{g} = \mathrm{id}_{\hat{M}_2}$ und $\hat{g} \circ \hat{f} = \mathrm{id}_{\hat{M}_1}$. Dies beweist, dass $\hat{g} = \hat{f}^{-1}$ ist, also $\hat{f}$ bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion. Somit erfüllt $\Phi := \hat{f}$ die Behauptung.

(b) Ist $d_1 = d_2$, so ist Φ isometrisch. (1)

Lösung: Ist $d_1 = d_2$, so ist die Identität f von (M, d_1) nach (M, d_2) isometrisch. Daher ist nach der vorigen Aufgabe auch $\Phi = \hat{f}$ isometrisch. Also ist Φ ein isometrischer Isomorphismus der Vervollständigungen mit $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$.

Also sind je zwei Vervollständigungen eines gegebenen metrischen Raumes isometrisch isomorph mit einem isometrischen Isomorphismus Φ, der $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$ erfüllt.