



Elemente der Topologie: Probeklausur

1. Sei $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{R} : A^c \text{ ist eine höchstens abzählbare Menge}\} \cup \{\emptyset\}$. Zeige, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist! (10)
2. Sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass alle endlichen Teilmengen von X abgeschlossen sind! (8)
3. Sei X ein Hausdorff-Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge. Zeige, dass $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt ist! (8)
4. Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X . Zeige, dass $(x_i)_{i \in I}$ einen Häufungspunkt besitzt! (16)
5. Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen. Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ die Menge der monoton wachsenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Bestimme Abschluss und Inneres von $\mathcal{M}$! (20)
6. Sei X ein Hausdorff-Raum. Seien f und g stetige Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch $h := f \cdot g$, also die Funktion $x \mapsto h(x) := f(x) \cdot g(x)$, stetig auf X ist! (10)
7. Sei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie und $X := \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$ mit der daraus resultierenden Produkttopologie versehen. Zeige:
 - (a) Der Raum X ist ein Hausdorff-Raum. (4)
 - (b) Der Raum X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. (8)
 - (c) Es gibt kein $x \in X$, für das die Menge $\{x\}$ offen ist. (4)
 - (d) Der Linksshift $L: X \rightarrow X$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ist stetig. (8)
8. Entscheide (ohne Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind; korrekte Antworten geben einen Punkt, inkorrekte einen Abzug von einem Punkt, wobei die gesamte Aufgabe aber nicht mit weniger als null Punkten gewertet wird: (10)
 - (1) Erfüllt ein topologischer Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so auch das erste.
 - (2) Ist X ein topologischer Raum und $A \subset X$ sowohl offen als auch abgeschlossen, so ist $A = \emptyset$ oder $A = X$.
 - (3) Ist X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{B}$ eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge von X , so gibt es eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X , zu der $\mathcal{B}$ eine Basis ist.
 - (4) Ist X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{T}_i$ die indiskrete Topologie auf X , so ist $(X, \mathcal{T}_i)$ separabel.
 - (5) In einem topologischen Raum X ist eine Menge A genau dann abgeschlossen, wenn $\partial A \subset A$ ist.

- (6) Sind X und Y Hausdorff-Räume, ist A eine Teilmenge von X und ist $f: X \rightarrow Y$ stetig, so ist die Einschränkung $f|_A: A \rightarrow Y$ von f auf A stetig bezüglich der relativen Topologie auf A .
- (7) Es gibt eine unendliche Menge Y und eine Hausdorff-Topologie auf Y mit der Eigenschaft, dass für jeden Hausdorff-Raum X jede Funktion $f: X \rightarrow Y$ stetig ist.
- (8) Erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist jede folgenkompakte Teilmenge von X kompakt.
- (9) Ist M ein vollständiger metrischer Raum, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von M kompakt.
- (10) Für Hausdorff-Räume X , Y und Z ist eine Funktion $f: X \rightarrow Y \times Z$, wobei wir $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ mit $f_1: X \rightarrow Y$, $f_2: X \rightarrow Z$ schreiben, genau dann stetig, wenn f_1 und f_2 stetige Funktionen sind.