UNIVERSITÄT ULM

Dienstag, 22.12.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 106

Lösungen Elemente der Topologie: Probeklausur

1. Sei $\mathscr{T} := \{A \subset \mathbb{R} : A^c \text{ ist eine höchstens abzählbare Menge}\} \cup \{\emptyset\}$. Zeige, dass $\mathscr{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist! (10)

Lösung: Nach Definition ist $\emptyset \in \mathscr{T}$. Weil $\mathbb{R}^c = \emptyset$ höchstens abzählbar ist, ist auch $\mathbb{R}$ in $\mathscr{T}$.

Seien nun O_α, $\alpha \in I$, Mengen in $\mathscr{T}$, und sei $O := \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. Ist $O_\alpha = \emptyset$ für alle $\alpha \in I$, so ist $O = \emptyset$ und daher $O \in \mathscr{T}$. Gibt es hingegen ein $\alpha_0 \in I$ mit $O_{\alpha_0} \neq \emptyset$, so ist $O_{\alpha_0}^c$ eine höchstens abzählbare Menge. Wegen $O^c = \bigcap_{\alpha \in I} O_\alpha^c \subset O_{\alpha_0}^c$ ist dann auch O^c eine höchstens abzählbare Menge. Also ist $O \in \mathscr{T}$.

Seien nun O_i, $i = 1, \dots, n$, Mengen in $\mathscr{T}$, und sei $O := \bigcap_{i=1}^n O_i$. Ist $O_i = \emptyset$ für ein i, so ist $O = \emptyset$ und somit $O \in \mathscr{T}$. Sind hingegen alle O_i nicht-leer, so ist O_i^c für jedes i höchstens abzählbar. Folglich ist auch ihre Vereinigung $O^c = \bigcup_{i=1}^n O_i^c$ höchstens abzählbar. Also ist $O \in \mathscr{T}$.

Wir haben alle drei Axiome einer Topologie nachgerechnet.

2. Sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass alle endlichen Teilmengen von X abgeschlossen sind! (8)

Lösung: Sei $x \in X$ beliebig. Ist nämlich $y \neq x$, so gibt es nach Definition offene Mengen O_1 und O_2 mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $x \in O_1$ und $y \in O_2$. Insbesondere ist $x \notin O_2$, also $O_2 \subset \{x\}^c$. Also ist $\{x\}^c$ eine Umgebung von y. Weil $y \in \{x\}^c$ beliebig war, bedeutet dies, dass $\{x\}^c$ offen ist. Also ist $\{x\}$ abgeschlossen.

Wir haben gesehen, dass Mengen mit nur einem Element abgeschlossen sind. Weil endliche Mengen endliche Vereinigungen von einelementigen Mengen sind, folgt daraus, dass endliche Mengen abgeschlossen sind.

3. Sei X ein Hausdorff-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge. Zeige, dass $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt ist! (8)

Lösung: Sei $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\alpha_0 \in I$ mit $x \in O_{\alpha_0}$. Weil O_{α_0} also eine Umgebung von x ist, gibt es nach Definition der Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in O_{\alpha_0}$ für $n \geq n_0$. Zudem gibt es α_i, $i = 1, \dots, n_0 - 1$, mit $x_i \in O_{\alpha_i}$. Insgesamt ergibt sich also $x_n \in \bigcup_{i=0}^{n_0-1} O_{\alpha_i}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was $K \subset \bigcup_{i=0}^{n_0-1} O_{\alpha_i}$ zeigt. Folglich besitzt jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung, was die Kompaktheit von K zeigt.

4. Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Zeige, dass $(x_i)_{i\in I}$ einen Häufungspunkt besitzt! (16)

Lösung: Zu $i \in I$ sei $A_i := \overline{\{x_j : j \succeq i\}}$. Dann ist A_i für jedes $i \in I$ eine abgeschlossene Teilmenge von X. Für endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ gibt es nach Definition einer gerichteten Menge jeweils ein $i_0 \in I$ mit $i_0 \succeq i_k$ für $k = 1, \dots, n$. Also ist $\{x_j : j \succeq i_0\} \subset \{x_j : j \succeq i_k\}$ für jedes k und folglich $A_{i_0} \subset A_{i_k}$. Also ist $x_{i_0} \in \bigcap_{k=1}^n A_{i_k} \neq \emptyset$.

Wir haben gesehen, dass der Durchschnitt je endlich vieler der abgeschlossenen Mengen A_i nicht leer ist. Aus der Kompaktheit von X folgt dann, dass der Durchschnitt $K := \bigcap_{i\in I} A_i$

aller A_i nicht leer ist. Sei $x \in K$. Wir zeigen, dass x ein Häufungspunkt von (x_i) ist. Ist nämlich U eine Umgebung von x und $i_0 \in I$ vorgegeben, so ist wegen $x \in A_{i_0}$ der Durchschnitt $U \cap \{x_j : j \succeq i_0\}$ nicht leer. Es gibt also $i \succeq i_0$ mit $x_i \in U$. Weil U und i_0 beliebig waren, heißt dies gerade, dass x ein Häufungspunkt von (x_i) ist.

5. Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen. Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ die Menge der monoton wachsenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Bestimme Abschluss und Inneres von $\mathcal{M}$! (20)

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{M}^c$ offen ist. Sei dazu f in $\mathcal{M}^c$. Dann gibt es $x < y$ mit $f(x) > f(y)$. Sei $\varepsilon := f(x) - f(y)$, und sei

$$U := \big\{g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : |g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } |g(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\big\}.$$

Nach Definition der punktweisen Topologie ist U eine Umgebung von f. Ist aber g in U, so gilt

$$g(x) \geq f(x) - |f(x) - g(x)| > f(x) - \frac{\varepsilon}{2} = f(y) + \frac{\varepsilon}{2} \geq g(y) - |g(y) - f(y)| + \frac{\varepsilon}{2} > g(y).$$

Also ist g nicht monoton, was $g \in \mathcal{M}^c$ zeigt. Wir haben gesehen, dass $U \subset \mathcal{M}^c$ ist, also f ein innerer Punkt von $\mathcal{M}^c$ ist. Weil $f \in \mathcal{M}^c$ beliebig war, zeigt dies, dass $\mathcal{M}^c$ offen ist. Somit ist $\mathcal{M}$ abgeschlossen, also $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{M}^c$ in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ dicht ist. Sei dazu $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ beliebig und U eine Umgebung von f. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und $(x_i)_{i=1}^n$ mit

$$B := \{g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)\} \subset U.$$

Seien nun $y < z$ zwei reelle Zahlen, die nicht in $\{x_i : i = 1, \ldots, n\}$ liegen. Definieren wir $h(y) := 1$, $h(z) := 0$ und $h(x) := f(x)$ für $x \notin \{y, z\}$, so ist $h \in B$ und $h \notin \mathcal{M}$. Also ist $h \in U \cap \mathcal{M}^c \neq \emptyset$. Weil U beliebig war, zeigt dies $h \in \overline{\mathcal{M}^c}$. Weil h beliebig war, folgt $\overline{\mathcal{M}^c} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$, was gleichbedeutend damit ist, dass das Innere von $\mathcal{M}$ leer ist.

6. Sei X ein Hausdorff-Raum. Seien f und g stetige Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass dann auch $h := f \cdot g$, also die Funktion $x \mapsto h(x) := f(x) \cdot g(x)$, stetig auf X ist! (10)

Lösung: Folgende Aussage ist aus der Analysis bekannt: Sind (x_n) und (y_n) reelle Folgen mit Grenzwerten x und y, so konvergiert die Folge $(x_n \cdot y_n)$ gegen $x \cdot y$. Dies bedeutet, dass die Abbildung $m\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $m(x, y) := x \cdot y$ folgenstetig und somit stetig ist, da $\mathbb{R}^2$ als metrischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Sind f und g stetige Funktionen nach $\mathbb{R}$, so definiert $w(x) := (f(x), g(x))$ eine stetige Funktion von X nach $\mathbb{R}^2$, laut Vorlesung ist eine Funktion in einen Produktraum genau dann stetig, wenn jede Koordinate der Funktion stetig ist.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass $h = m \circ w$ eine stetige Funktion ist, was gerade die Behauptung war.

7. Sei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie und $X := \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$ mit der daraus resultierenden Produkttopologie versehen. Zeige:

(a) Der Raum X ist ein Hausdorff-Raum. (4)

Lösung: Seien $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zwei Elemente von X mit $x \neq y$. Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Die Menge

$$O_1 := \{(z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X : z_{i_0} = x_{i_0}\} = \{(z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X : \pi_{i_0}(z) \in \{x_{i_0}\}\}$$

ist nach Definition der Produkttopologie offen in X, da $\{x_{i_0}\}$ offen in $\{0,1\}$ ist, und ebenso ist

$$O_2 := \{(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X : z_{i_0} = y_{i_0}\}$$

offen. Nach Konstruktion sind zudem O_1 und O_2 disjunkt mit $x \in O_1$ und $y \in O_2$. Weil x und y beliebig waren, zeigt dies die Hausdorff-Eigenschaft von X.

(b) Der Raum X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. (8)

Lösung: Die kanonische Basis der Produkttopologie besteht aus den Mengen der Form

$$B = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X : x_i \in O_i \text{ für } i = 1,\dots,n\} = O_1\times O_2\times\cdots\times O_n\times\{0,1\}\times\{0,1\}\times\cdots,$$

wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist und $O_i \subset \{0,1\}$ für $i = 1,\dots,n$ beliebig sind. Für jedes feste n gibt es offenbar nur endlich viele Mengen obiger Form, genauer gesagt höchstens 4^n viele. Also ist die Gesamtheit der Mengen obiger Form die abzählbare Vereinigung endlicher Mengen und somit (höchstens) abzählbar.

Also ist die kanonische Basis der Produkttopologie höchstens abzählbar, und insbesondere existiert eine abzählbare Basis der Topologie. Also erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Bemerkung: Man kann sich überlegen, dass sogar jede offene Menge von obiger Form ist. Also enthält sogar die Topologie selbst nur abzählbar viele Mengen.

(c) Es gibt kein $x \in X$, für das die Menge $\{x\}$ offen ist. (4)

Lösung: Offenbar enthält jede Basismenge der in der vorigen Teilaufgabe angegebenen Form unendlich viele (sogar überabzählbar viele) Elemente. Da jede nicht-leere offene Menge aber eine Basismenge enthält, enthält folglich jede nicht-leere offene Menge unendlich viele Elemente. Insbesondere sind einelementige Mengen nicht offen.

(d) Der Linksshift $L\colon X \to X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist stetig. (8)

Lösung: Sei B eine Menge der Form

$$B = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X : x_i \in O_i \text{ für } i = 1,\dots,n\},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $O_i \subset \{0,1\}$, $i = 1,\dots,n$, sei. Nun ist $L(x)$ genau dann in B, wenn x in

$$A := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X : x_{i+1} \in O_i \text{ für } i = 1,\dots,n\}$$

liegt, was nach Definition eine Basismenge der Topologie darstellt. Also ist $L^{-1}(B) = A$ eine offene Menge. Wir haben gezeigt, dass Urbilder von Basismengen offen sind. Folglich ist L stetig.

8. Entscheide (ohne Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind; korrekte Antworten geben einen Punkt, inkorrekte einen Abzug von einem Punkt, wobei die gesamte Aufgabe aber nicht mit weniger als null Punkten gewertet wird: (10)

(1) Erfüllt ein topologischer Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so auch das erste.

Lösung: richtig; dies wurde in der Vorlesung begründet.

(2) Ist X ein topologischer Raum und $A \subset X$ sowohl offen als auch abgeschlossen, so ist $A = \emptyset$ oder $A = X$.

Lösung: falsch; ein Gegenbeispiel ist $X = \{0,1\}$ mit der diskreten Topologie und $A = \{0\}$.

(3) Ist X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{B}$ eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge von X, so gibt es eine Topologie $\mathscr{T}$ auf X, zu der $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

Lösung: falsch; beispielsweise ist $\mathcal{B} = \emptyset$ keine Basis, da sich X dann nicht als Vereinigung von Basismengen schreiben lässt.

(4) Ist X eine nicht-leere Menge und $\mathscr{T}_i$ die indiskrete Topologie auf X, so ist $(X, \mathscr{T}_i)$ separabel.

Lösung: richtig; für jedes $x \in X$ ist $\overline{\{x\}} = X$ und daher $\{x\}$ eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge von X.

(5) In einem topologischen Raum X ist eine Menge A genau dann abgeschlossen, wenn $\partial A \subset A$ ist.

Lösung: richtig; ist nämlich $\partial A \subset A$, so ist $\overline{A} = \partial A \cup A^\circ \subset A$, was wegen $A \subset \overline{A}$ also $A = \overline{A}$ zeigt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass A abgeschlossen ist.
Ist umgekehrt A abgeschlossen, so ist $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = A \setminus A^\circ \subset A$.

(6) Sind X und Y Hausdorff-Räume, ist A eine Teilmenge von X und ist $f\colon X \to Y$ stetig, so ist die Einschränkung $f|_A\colon A \to Y$ von f auf A stetig bezüglich der relativen Topologie auf A.

Lösung: richtig; ist $O \subset Y$ offen, so ist $f_A^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A$ als Durchschnitt einer offenen Menge mit A relativ offen, also offen in der relativen Topologie. Dies zeigt die Stetigkeit von f_A.

(7) Es gibt eine unendliche Menge Y und eine Hausdorff-Topologie auf Y mit der Eigenschaft, dass für jeden Hausdorff-Raum X jede Funktion $f\colon X \to Y$ stetig ist.

Lösung: falsch; nehmen wir an, die Aussage sei richtig. Seien nun y_1 und y_2 zwei Punkte aus Y mit $y_1 \neq y_2$. Weil Y ein Hausdorff-Raum ist, gibt es eine offene Menge O in Y mit $y_1 \in O$ und $y_2 \notin O$. Wir wählen $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie, $f(x) \coloneqq y_1$ für $x \leq 0$ und $f(x) \coloneqq y_2$ für $x > 0$. Dann ist f nach Voraussetzung stetig und daher $f^{-1}(O) = (-\infty, 0]$ offen, ein Widerspruch.

(8) Erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist jede folgenkompakte Teilmenge von X kompakt.

Lösung: richtig; jede folgenkompakte Menge ist abzählbar kompakt, und in der Übung wurde zudem gezeigt, dass unter dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom jede abzählbar kompakte Menge kompakt ist.

(9) Ist M ein vollständiger metrischer Raum, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von M kompakt.

Lösung: falsch; ein Gegenbeispiel ist $M = \mathbb{R}$ mit der Teilmenge $[0, \infty)$, die zwar abgeschlossen, aber nicht kompakt ist.

(10) Für Hausdorff-Räume X, Y und Z ist eine Funktion $f\colon X \to Y \times Z$, wobei wir $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ mit $f_1\colon X \to Y$, $f_2\colon X \to Z$ schreiben, genau dann stetig, wenn f_1 und f_2 stetige Funktionen sind.

Lösung: richtig; laut Vorlesung ist eine Funktion in die Produkttopologie genau dann stetig, wenn die Komposition mit jeder Projektion stetig ist, was hier wegen $\pi_Y \circ f = f_1$ und $\pi_Z \circ f = f_2$ gerade die Behauptung ist.