Universität Ulm

Dienstag, 22.02.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 100

Lösungen Elemente der Topologie: Klausur 1

1. Zeigen Sie, dass in einem Hausdorff-Raum jede einelementige Menge abgeschlossen ist! (10)

Lösung: Sei X ein Hausdorff-Raum und $x \in X$. Wir zeigen, dass $\{x\}^c$ offen ist. Sei dazu $y \in \{x\}^c$ beliebig. Weil X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es offene Mengen O_1 und O_2 mit $x \in O_1$, $y \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Also ist $O_2 \subset \{x\}^c$ und somit $\{x\}^c$ eine Umgebung von y. Weil $y \in \{x\}^c$ beliebig war, zeigt dies, dass $\{x\}^c$ offen ist. Also ist $\{x\}$ abgeschlossen.

2. Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass die Menge $O := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(x_i) > 0 \ \forall i = 1, \dots, n\}$ offen ist! (10)

Lösung: *Variante 1:* Sei $f \in O$ beliebig und sei $\varepsilon := \min_{i=1,\dots,n} f(x_i)$. Dann ist $\varepsilon > 0$. Sei $\omega := \{x_i : i = 1, \dots, n\}$. Nach Definition der Topologie ist

$$B := B(f, \omega, \varepsilon) = \{g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, n\}$$

eine offene Menge. Für $g \in B$ gilt

$$g(x_i) = f(x_i) - (f(x_i) - g(x_i)) \geq f(x_i) - |f(x_i) - g(x_i)| > f(x_i) - \varepsilon \geq 0$$

für $i = 1, \dots, n$, also $g \in O$. Wir haben $B \subset O$ gezeigt, also dass f ein innerer Punkt von O ist. Weil $f \in O$ beliebig war, ist folglich O offen.

Variante 2: Sei π_i die Punktauswertung $\pi_i(f) := f(x_i)$. Laut Vorlesung ist π_i stetig von $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$. Offenbar ist

$$O = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}((0, \infty))$$

und somit als endlicher Durchschnitt offener Mengen wieder offen.

3. Sei M ein metrischer Raum und K eine kompakte Teilmenge von M. Zeigen Sie, dass K beschränkt ist! (10)
Hinweis: $A \subset M$ heißt *beschränkt*, wenn es $x \in M$ und $R \geq 0$ mit $A \subset B(x, R)$ gibt.

Lösung: *Variante 1:* Sei $x \in M$ fest gewählt. Die Kugeln $B(x, r)$ sind für jedes $r > 0$ offen und es gilt $K \subset M = \bigcup_{r>0} B(x, r)$. Nach Definition der Kompaktheit gibt es also endlich viele Zahlen $r_i > 0$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x, r_i)$. Für $R := \max_{i=1,\dots,n} r_i$ gilt dann $K \subset B(x, R)$.

Variante 2: Sei $x \in M$ fest gewählt. Die Funktion $y \mapsto d(x, y)$ ist stetig, nimmt also auf der kompakten Menge K einen maximalen Wert r an. Somit ist $K \subset \overline{B}(x, r) \subset B(x, r + 1)$, die Behauptung also mit $R := r + 1$ erfüllt.

4. Sei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie und $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}} := \prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}$ mit der Produkttopologie versehen. Sei $A \subset X$ zusammenhängend. Zeigen Sie, dass A aus höchstens einem Element besteht. (10)
Bemerkung: Man nennt Räume mit dieser Eigenschaft *total unzusammenhängend.*

Lösung: Wir führen den Beweis indirekt. Sei also A eine Menge mit mindestens zwei Elementen, seien also $x \neq y$ Elemente von A. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq y_n$. Nach Definition der Topologie von X sind die Mengen

$$O_1 := \{z \in X : z_n = x_n\} \quad \text{und} \quad O_2 := \{z \in X : z_n = y_n\}$$

offen. Nach Konstruktion ist $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $O_1 \cup O_2 = X \supset A$. Zudem ist $x \in O_1 \cap A \neq \emptyset$ und $y \in O_2 \cap A \neq \emptyset$. Nach Definition ist somit A unzusammenhängend.

5. *Ein-Punkt-Kompaktifizierung:* Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ seien mit der üblichen euklidischen Topologie versehen. Sei $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Es sei

$$\hat{\mathscr{T}} := \big\{O \subset \hat{\mathbb{C}} : \infty \notin O \text{ und } O \text{ offen in } \mathbb{C}\big\} \cup \big\{O \subset \hat{\mathbb{C}} : \infty \in O \text{ und } O^c \text{ kompakt in } \mathbb{C}\big\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\hat{\mathscr{T}}$ ist eine Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$. (10)

Lösung: Weil $\emptyset$ offen und kompakt in $\mathbb{C}$ ist, ist $\emptyset \in \hat{\mathscr{T}}$ und $\hat{\mathbb{C}} \in \hat{\mathscr{T}}$.
Seien $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ Mengen in $\hat{\mathscr{T}}$ und sei $O := \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$. Gilt $\infty \notin O_\alpha$ für alle $\alpha \in I$, so ist nach Definition O_α eine offene Menge in $\mathbb{C}$ für alle $\alpha \in I$ und somit $\infty \notin O$ und O offen in $\mathbb{C}$, also $O \in \hat{\mathscr{T}}$. Es gebe nun ein $\alpha_0 \in I$ mit $\infty \in O_{\alpha_0}$. Dann ist

$$O^c = O^c \cap \mathbb{C} = \bigcap\nolimits_{\alpha \in I} (O_\alpha^c \cap \mathbb{C}) \subset O_{\alpha_0}^c$$

und jede der Mengen $O_\alpha^c \cap \mathbb{C}$ ist wegen $O_\alpha \in \hat{\mathscr{T}}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Also ist O^c eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge und daher selbst wieder eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wegen $\infty \in O$ zeigt dies $O \in \hat{\mathscr{T}}$.
Seien nun $(O_i)_{i=1}^n$ Mengen in $\hat{\mathscr{T}}$ und sei $O := \bigcap_{i=1}^n O_i$. Dann ist $O_i \cap \mathbb{C}$ für jedes i eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Gibt es ein i_0 mit $\infty \notin O_{i_0}$, so ist $\infty \notin O$ und

$$O = O \cap \mathbb{C} = \bigcap\nolimits_{i=1}^{n} (O_i \cap \mathbb{C})$$

offen in $\mathbb{C}$, was $O \in \hat{\mathscr{T}}$ zeigt. Ist hingegen $\infty \in O_i$ für alle i, so ist $\infty \in O$ und $O^c = \bigcup_{i=1}^n O_i^c$ als endliche Vereinigung kompakter Mengen wieder kompakt, also auch in diesem Fall $O \in \hat{\mathscr{T}}$.
Wir haben alle Eigenschaften einer Topologie nachgewiesen.

(b) $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathscr{T}})$ ist ein Hausdorff-Raum. (10)

Lösung: Seien x und y Elemente von $\hat{\mathbb{C}}$. Wir müssen zeigen, dass es Mengen O_1 und O_2 in $\hat{\mathscr{T}}$ mit $x \in O_1$, $y \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ gibt.
Seien zuerst beide Elemente in $\mathbb{C}$. Dann gibt es offene Mengen O_1 und O_2 in $\mathbb{C}$ mit $x \in O_1$, $y \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, da $\mathbb{C}$ ein Hausdorff-Raum ist. Da O_1 und O_2 auch in $\hat{\mathscr{T}}$ liegen, folgt in diesem Fall die Behauptung.
Sei nun $y = \infty$. Wegen $x \neq y$ ist dann $x \in \mathbb{C}$. Wähle

$$O_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - x| < 1\} \quad \text{und} \quad O_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z - x| > 1\} \cup \{\infty\}.$$

Dann ist nach Konstruktion $x \in O_1$, $y \in O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Weil O_1 offen in $\mathbb{C}$ ist und $O_2^c = \overline{B}(x, 1)$ kompakt in $\mathbb{C}$ ist, sind die Mengen O_1 und O_2 in $\hat{\mathscr{T}}$. Wir haben für diesen Fall also die Behauptung gezeigt.
Der Fall $x = \infty$ ergibt sich durch Umbenennung der Elemente aus den vorigen Überlegungen.

(c) $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathscr{T}})$ ist kompakt. (10)

Lösung: Sei $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie in $\hat{\mathscr{T}}$ mit $\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha$. Dann gibt es $\alpha_0 \in I$ mit $\infty \in O_{\alpha_0}$. Die Menge $K := O_{\alpha_0}^c$ ist kompakt in $\mathbb{C}$ und es gilt

$$K = K \cap \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}} \cap \mathbb{C} = \bigcup\nolimits_{\alpha\in I} (O_\alpha \cap \mathbb{C}).$$

Da die Mengen $O_\alpha \cap \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ offen sind, gibt es endlich viele Indizes α_i, $i = 1, \ldots, n$, die bereits $K \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$ erfüllen. Insgesamt ergibt sich

$$\hat{\mathbb{C}} = O_{\alpha_0} \cup K \subset \bigcup\nolimits_{i=0}^n O_{\alpha_i}.$$

Wir haben gezeigt, dass jede offene Überdeckung von $\hat{\mathbb{C}}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

6. Bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten, aufgefasst als Funktionen von der Menge $\mathbb{R}$ in den topologischen Raum $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die euklidische Topologie die Initialtopologie von $\mathcal{P}$ ist! (10)

Lösung: Bezeichne $\mathscr{T}_e$ die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$. Sei $\mathscr{T}$ die Initialtopologie von $\mathcal{P}$ (man sagt auch, $\mathscr{T}$ sei die *von $\mathcal{P}$ rückwärts induzierte Topologie*), also die gröbste Topologie, bezüglich der alle Polynome stetig nach $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ sind. Weil jedes Polynom stetig von $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ nach $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_e)$ ist, ist dann $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_e$. Die Funktion p gegeben durch $p(x) := x$ für $x \in \mathbb{R}$ ist ein Polynom $p \in \mathscr{P}$. Also gilt $O = p^{-1}(O) \in \mathscr{T}$ für jedes $O \in \mathscr{T}_e$. Dies zeigt $\mathscr{T}_e \subset \mathscr{T}$. Insgesamt haben wir $\mathscr{T} = \mathscr{T}_e$ gezeigt.

7. Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort im Prüfungsbogen an: (20)

(1) Erfüllt ein metrischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist er separabel.

Lösung: Falsch: Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, aber nicht jeder metrische Raum ist separabel. Ein Beispiel ist eine beliebige überabzählbare Menge X, die mit der diskreten Metrik versehen wird.

(2) Jede nicht-leere Menge X, versehen mit der diskreten Topologie, erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Lösung: Falsch: In der Übung (Aufgabe 8) wurde gezeigt, dass X mit der diskreten Topologie genau dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, wenn der Grundraum abzählbar ist.

(3) Jede Teilmenge von $\mathbb{Q}$, die bezüglich der euklidischen Topologie ein vollständiger metrischen Raum ist, ist als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ abgeschlossen.

Lösung: Richtig: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raums abgeschlossen ist.

(4) Ist M ein metrischer Raum und A eine abzählbare Teilmenge von M, so ist A abgeschlossen.

Lösung: Falsch: Ein Gegenbeispiel ist $M = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{Q}$.

(5) Ist X ein separabler Hausdorff-Raum und Y eine nicht-leere Teilmenge von X, so ist Y bezüglich der relativen Topologie separabel.

Lösung: Falsch: Für ein Gegenbeispiel siehe Beispiel 5.11 in der Vorlesung.

(6) Ist X ein Hausdorff-Raum, $K \subset X$ kompakt und A eine nicht-leere Teilmenge von K, so ist auch A kompakt.

Lösung: Falsch: Ein Gegenbeispiel ist $X = \mathbb{R}$, $K = [0, 1]$ und $A = (0, 1)$.

(7) In einem topologischen Raum X ist eine Menge A genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$ gilt.

Lösung: Richtig: Nach Definition des Randes ist $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Insbesondere ist $\partial A \cap A^\circ = \emptyset$ und somit $\partial A \cap A = \emptyset$, wenn A offen ist.
Sei nun umgekehrt $\partial A \cap A = \emptyset$. Wegen $A \subset \overline{A}$ ist dann auch $A \setminus A^\circ = \emptyset$. Weil aber stets $A^\circ \subset A$ gilt, kann dies nur im Fall $A = A^\circ$ richtig sein, also wenn A offen ist.

(8) In einem kompakten metrischen Raum ist jeder Ultrafilter konvergent.

Lösung: Richtig: Das ist ein Teil von Satz 10.14 aus der Vorlesung.

(9) Die Menge $\{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : |u(x)| \leq |x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ ist kompakt in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz.

Lösung: Richtig: Laut Aufgabe 41 ist diese Menge homöomorph zu $\prod_{x\in\mathbb{R}}[-|x|, |x|]$ mit der Produkttopologie. Der Raum ist also nach dem Satz von Tychonov kompakt.

(10) Ist K ein kompakter Hausdorff-Raum und $A \subset K$ abgeschlossen, so ist die Abbildung $f \mapsto f|_A$ surjektiv von $\mathrm{C}(K)$ nach $\mathrm{C}(A)$.

Lösung: Richtig: Die Behauptung ist äquivalent dazu, dass jede stetige Funktion auf A eine Fortsetzung zu einer stetigen Funktion auf K hat. Letzteres ist aber nach dem Satz von Tietze richtig, da ein kompakter Raum normal ist.