Vorlesungsmanuskript: Wintersemester 2009/10

Elemente der Topologie

Wolfgang Arendt

Einleitung

Das Wort **Topologie** setzt sich aus den griechischen Wörtern *topos* = *Ort* und *logos* = *Lehre* zusammen. In einem Teil der Topologie (der algebraischen Topologie) untersucht man wie sich geometrische Objekte unter Verformung verhalten. Kann man eine Tasse zu einem Reifen verformen? Wir denken in dieser Vorlesung mehr an die mengentheoretische Topologie, die sich Anfang des letzten Jahrhunderts entwickelt hat und zu einem Grundlagenfach für fast alle Gebiete der Mathematik geworden ist. Ihr Ziel ist es, Begriffe wie offen und abgeschlossen, kompakt, Zusammenhang, Konvergenz, Stetigkeit, die man aus der Analysis im $\mathbb{R}^d$ kennt, systematisch zu untersuchen. Man definiert anhand von drei Axiomen einen topologischen Raum und entwickelt daraus deduktiv eine Theorie, die zum einen ästhetisch ist, deren Ergebnisse und Begriffsbildungen aber auch sehr effizient und universell eingesetzt werden können.

Um ein konkretes Ziel zu nennen, betrachten wir Funktionen f_n, f auf $\mathbb{R}^2$ mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Mindestens 3 verschiedene Arten wie f_n gegen f konvergieren kann spielen eine wichtige Rolle in der Analysis:

1. **Punktweise Konvergenz:** $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

2. **Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilungen:** $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|x|\le R} |f_n(x) - f(x)| = 0$ für alle $R > 0$.

3. **Gleichmäßige Konvergenz:** $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Diese 3 Begriffe der Konvergenz haben unterschiedliche Permanenzeigenschaften. Punktweise Konvergenz erhält Messbarkeit aber nicht Stetigkeit (d.h. der punktweise Limes von stetigen Funktionen ist nicht notwendig stetig). Aber die Konvergenz bzgl. 2 erhält Stetigkeit und sogar Holomorphie falls wir eine entsprechende Definition mit $\mathbb{C}$ als Wertebereich treffen. Die Konvergenz in 2. kommt von einer Metrik, die von 3. von einer Norm, die in

1. lässt sich nicht durch eine Metrik definieren.

In der Vorlesung werden wir lernen, wie wir einen universellen Konvergenzbegriff definieren können, für den alle 3 Konvergenzarten von Funktionen Beispiele sind.

Den Studenten der Vorlesung im WS 2009/10 gilt mein Dank für ihre Aufmerksamkeit und ihre Kommentare. Herrn Olaf Wied danke ich für die Korrektur einiger Fehler. Das Manuskript wurde von Frau Inge Kölle wöchentlich in LaTeX gesetzt: ihr gilt mein besonderer Dank.

Ulm, im Februar 2010 Professor Dr. Wolfgang Arendt

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume

Die Grundidee der Topologie ist, Eigenschaften der offenen Mengen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^d$ axiomatisch zu fassen. Wir erinnern daran, dass eine Menge $O \subset \mathbb{R}$ *offen* heißt, wenn es zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ gibt derart dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset O$. Zum Beispiel sind Intervalle der Form $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offen, aber $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ist nicht offen; auch $\mathbb{Q}$ ist nicht offen.
Wir geben uns nun eine beliebige Menge X vor und sagen, welche Teilmengen von X wir offen nennen wollen. Wir erinnern daran, dass die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$ die Menge aller Teilmengen von X ist.

Definition 1.1. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Teilmenge $\mathcal{O}$ von $\mathcal{P}(X)$, also einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, für die die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;

(b) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$,

(c) $O_i \in \mathcal{O}(i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Man nennt dann eine Menge $O \subset X$ *offen*, wenn $O \in \mathcal{O}$. Wir verlangen also, dass das System der offenen Mengen stabil unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen ist. Wir geben zunächst eine Reihe von Beispielen.

Beispiel 1.2. a) Sei X eine Menge. Dann definiert $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X, die *indiskrete Topologie*.
b) Sei X eine Menge. Dann heißt $\mathcal{O} := \mathcal{P}(X)$ die *diskrete Topologie*.
c) Sei $X = \mathbb{R}$. Wir nennen $O \subset \mathbb{R}$ *offen*, falls es zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ gibt derart dass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset O$. Dann heißt $\mathcal{O} := \{O \subset \mathbb{R} : O \text{ offen}\}$, die *natürliche Topologie*. Sie ist verschieden von der diskreten oder indiskreten Topologie.

Das Beispiel c) läßt sich auf beliebige metrische Räume übertragen. Wir setzen $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty)$.

Definition 1.3 (metrischer Raum)**.** Sei M eine Menge und

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d(x, y)$$

eine Abbildung, derart dass

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ (*Symmetrie*),

(c) $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*Dreiecksungleichung*)

für alle $x, y, z \in M$. Dann heißt d eine *Metrik* (oder ein *Abstand*) und (M, d) ein *metrischer Raum.*

In einem metrischen Raum wird also der Abstand zwischen zwei Punkten axiomatisiert. Ist (M, d) ein metrischer Raum, so nennt man $O \subset M$ offen, wenn gilt: Zu jedem $x \in O$ gibt es $\varepsilon > 0$ sodass $B(x, \varepsilon) \subset O$. Hier ist $B(x, \varepsilon) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$ *die Kugel* (engl.: ball) *mit Mittelpunkt x und Radius ε.* Die Menge $\mathcal{O}$ der so definierten offenen Mengen erfüllt die 3 Axiome aus Definition 1.1 (prüfen Sie das nach!). Man nennt $\mathcal{O}$ die *von d erzeugte Topologie auf $\mathcal{O}$.* Liegt ein metrischer Raum vor, so meinen wir immer diese Topologie (es sei denn etwas anderes wird ausdrücklich gesagt). Bezüglich dieser Topologie ist die Kugel $B(x, \varepsilon)$ offen (Übungsaufgabe).
Verschiedene Metriken können diesselbe Topologie erzeugen (d.h. also zu denselben offenen Mengen führen).

Aufgabe 1.4. Auf $\mathbb{R}$ wird die natürliche Topologie von der Metrik

$$d_1(x, y) = |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}) ,$$

aber auch von der Metrik $d_2(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ erzeugt.

Metriken kann man also auf beliebigen Mengen definieren, die weiter keine Struktur haben. Auf Vektorräumen axiomisiert man oft den Abstand zur 0. Das führt zu folgender Definition:

Definition 1.5 (normierter Vektorraum)**.** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine *Norm* ist eine Abbildung

$$\| \, \| : E \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\|$$

derart dass

(a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *Dreiecksungleichung*

für alle $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Man nennt dann $(E, \| \, \|)$ einen *normierten Vektorraum.*

Ist $(E, \| \, \|)$ ein normierter Vektorraum, so definiert $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf E. Wenn nichts anderes gesagt wird, betrachten wir diese Metrik und die davon induzierte Topologie. Die Metrik ist *translationsinvariant*, d.h.

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \text{ für alle } x, y, z \in E \ .$$

Ist $O \subset E$ offen, so sind auch $O + z := \{x + z : x \in O\}$ für jedes $z \in E$ und $\{\lambda x : x \in O\}$ für jedes $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ offen.

Beispiel 1.6. Sei $E = \mathbb{R}^d, \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) $\|x\|_2 := \left(\sum\limits_{i=1}^{d} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

(b) $\|x_1\|_\infty := \max\limits_{i=1 \ldots d} |x_i|$,

(c) $\|x_1\|_1 := \sum\limits_{i=1}^{d} |x_i|$

definieren Normen auf E. Dabei ist $\|x\|_2$ der *euklidische* Abstand zu 0.

Aufgabe 1.7. Zeichnen Sie die Einheitskugel $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ für die obigen 3 Normen auf $\mathbb{R}^2$.

Wir wollen nun verschiedene Topologien vergleichen.

Definition 1.8 (Vergleich von Topologien)**.** Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ zwei Topologien auf der Menge X. Dann definieren wir:

$$\mathcal{O}_1 \text{ ist } \textit{feiner} \text{ als } \mathcal{O}_2 :\Leftrightarrow \mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2 :\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \text{ ist } \textit{gröber} \text{ als } \mathcal{O}_1 \ .$$

Damit sind $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ gleich genau dann wenn $\mathcal{O}_1$ gröber und feiner als $\mathcal{O}_2$ ist.

Satz 1.9 (Vergleich von Normen)**.** Seien $\| \ \|_1, \| \ \|_2$ zwei Normen auf einem Vektorraum E und seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ die induzierten Topologien.
a) $\mathcal{O}_2$ ist feiner als $\mathcal{O}_1$ genau dann wenn es $\alpha > 0$ gibt derart dass

$$\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \ \text{ für alle } \ x \in E \ .$$

b) Es ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ genau dann wenn beide Normen *äquivalent* sind; d.h. wenn es $\alpha, \beta > 0$ gibt derart, dass

$$\beta \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \text{ für alle } x \in E \ .$$

Beweis: Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ die von $\| \ \|_1$ bzw. $\| \ \|_2$ induzierten Topologien. Seien $B_j(x, r) := \{x \in E : \|x\|_j < r\}, j = 1, 2$ die entsprechenden offenen Kugeln.

1. Es gelte $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$. Da $B_1(0, 1) \in \mathcal{O}_1$ ist also $B_1(0, 1)$ auch offen bzgl. $\mathcal{O}_2$. Da $0 \in B_1(0, 1)$, gibt es somit $\varepsilon > 0$ derart dass $B_2(0, \varepsilon) \subset B_1(0, 1)$. Für $x \in E, x \neq 0$, ist

$$y := \frac{x}{\|x\|_2} \frac{\varepsilon}{2} \in B_2(0, \varepsilon) \ .$$

Damit ist $\|y\|_1 < 1$. Da $\|y\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \frac{\varepsilon}{2}$, folgt dass $\|x\|_1 < \frac{2}{\varepsilon} \|x\|_2$.

2. Umgekehrt, sei $\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$ für alle $x \in E$. Sei $O \in \mathcal{O}_1$. Wir wollen zeigen, dass $O \in \mathcal{O}_2$. Sei $x \in O$. Da $O \in \mathcal{O}_1$, gibt es $\varepsilon > 0$ derart dass $B_1(x, \varepsilon) \subset O$. Die Voraussetzung impliziert, dass $B_2(x, \frac{\varepsilon}{\alpha}) \subset B_1(x, \varepsilon)$. Damit ist $B_2(x, \frac{\varepsilon}{\alpha}) \subset O$. Da $x \in O$ beliebig war, folgt dass $O \in \mathcal{O}_2$.

Wir haben a) gezeigt. Daraus folgt b) unmittelbar. $\square$

Aufgabe 1.10. Zeige, dass die 3 Normen in (1.6) äquivalent sind.

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum je zwei beliebige Normen äquivalent sind.

Aufgabe 1.11. Sei $-\infty < a < b < \infty$. Dann ist die Menge $C[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$ ein Vektorraum bzgl. der Addition

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \ , \end{aligned}$$

$f, g \in C[a, b], x \in [a, b], \lambda \in \mathbb{R}$.
a) Zeige, dass

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{dx}$$

zwei Normen auf $C[a, b]$ definiert.
b) Sind die induzierten Topologien vergleichbar?
c) Sind sie äquivalent?

Als nächstes überlegen wir uns, wie wir Topologien erzeugen können.

Satz 1.12 (erzeugte Topologie)**.** Sei X eine Menge, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine gröbste Topologie auf $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ auf X sodass $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(\mathcal{S})$.

Beweis: Setze $\mathcal{O}(\mathcal{S}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \\ \mathcal{T} \text{ Topologie}}} \mathcal{T}$. Tatsächlich ist der beliebige Durchschnitt von Topologien eine Topologie (klar aus der Definition einer Topologie). Damit ist also $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ eine Topologie. Ferner ist nach Definition jedes $S \in \mathcal{S}$ auch in $\mathcal{O}(\mathcal{S})$. Tatsächlich ist $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ die gröbste Topologie mit dieser Eigenschaft. Sei nämlich $\mathcal{T}_1$ eine Topologie mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_1$. Dann ist $\mathcal{O}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{T}_1$ nach Definition von $\mathcal{O}(\mathcal{S})$. $\square$

Der Satz besagt also, dass es genau eine gröbste Topologie $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ auf X gibt bzgl. derer alle Elemente $S \in \mathcal{S}$ offen sind. Allerdings sagt uns der Satz nicht, wie wir $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ aus den Elementen von $\mathcal{S}$ konstruieren können. Hier ist ein Weg.

Ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ so nennen wir $\bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} B_i$ eine Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$ wenn $B_i \in \mathcal{B}$ für alle $i \in I$ und I eine beliebige Indesmenge ist. Wir wollen auch die leere Menge zu diesen beliebigen Vereinigungen hinzunehmen. Formal ist $\bigcup\limits_{i \in \emptyset} B_i = \emptyset$.

Satz 1.13. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ sodass $X = \bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}} S$. Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{B} := \{S_1 \cap \ldots \cap S_n : n \in \mathbb{N}, S_j \in \mathcal{S} \quad (j = 1, \ldots, n)\} \ .$$

Dann ist $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ die Menge aller beliebigen Vereinigungen von $\mathcal{B}$.

Beweis: Sei $\mathcal{O}$ die Menge aller beliebigen Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{B}$. Wir zeigen dass $\mathcal{O}$ eine Topologie ist. Aus der Voraussetzung folgt, dass $\emptyset, X \in \mathcal{O}$. Seien $O_1 = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{I}} B_i, O_2 = \bigcup\limits_{i \in \mathcal{J}} C_j \in \mathcal{O}$ mit $B_i, C_j \in \mathcal{B}$. Dann ist

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &= \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} C_j \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j = J}} (B_i \cap C_j) \ . \end{aligned}$$

Da aber mit $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ auch $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, folgt dass $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$. Aus der Definition von $\mathcal{O}$ folgt, dass $\mathcal{O}$ stabil bzgl. beliebiger Vereinigungen ist. Damit ist $\mathcal{O}$ eine Topologie. Ferner ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$, und somit ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(\mathcal{S})$. Umgekehrt, da $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ eine Topologie ist, und $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(\mathcal{S})$, folgt dass $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{S})$

und daraus dass $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}(\mathcal{S})$. $\square$

Wir geben der Situation einen Namen, die in den vorangehenden Sätzen beschrieben wurde.

Definition 1.14. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.
a) Ein Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt eine *Subbasis* von $\mathcal{O}$ falls $X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$ und $\mathcal{O}(\mathcal{S}) = \mathcal{O}$. Somit ist also $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Subbasis von $\mathcal{O}$, wenn $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ und wenn die Menge der endlichen Durchschnitte von Elementen von $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ ist.
b) Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt *Basis* von $\mathcal{O}$, falls jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

Aufgabe 1.15. Das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : -\infty < a < b < \infty, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ist eine Basis der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$.

Eine Menge X heißt *abzählbar unendlich* falls es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to X$ gibt; sie heißt *abzählbar*, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Somit ist X genau abzählbar, wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gibt, derart dass $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist.

Definition 1.16. Ein topologischer Raum erfüllt das *2. Abzählbarkeitsaxiom*, falls X eine abzählbare Basis besitzt.

Man kann sich das Nachprüfen des 2. Abzählbarkeitsaxioms durch folgenden Satz sehr vereinfachen.

Satz 1.17. Hat ein topologischer Raum eine abzählbare Subbasis, so erfüllt er das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden beiden Lemmata (die z.B. aus der Analysis bekannt sind).

Lemma 1.18. *Die abzählbare Vereinigung von abzählbar vielen Mengen ist abzählbar.*

Damit gilt insbesondere:

Lemma 1.19. *Die Menge* $\{A \subset \mathbb{N} : A \text{ ist endlich}\}$ *ist abzählbar.*

Beispiel 1.20. Die von der Norm $\| \|_\infty$ erzeugte Topologie auf $\mathbb{R}^d$ nennt man die natürliche Topologie. Sie erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis: $\{B(x,r) : x \in \mathbb{Q}^d, 0 < r \in \mathbb{Q}\}$ ist eine abzählbare Basis. □

Beispiel 1.21 (Sorgenfrey-Topologie)**.** Sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ist durchschnittsstabil. Damit ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{O}(\mathcal{B})$. Diese Topologie hat keine abzählbare Basis.

Beweis: Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis von $\mathcal{O}(\mathcal{B})$. Da $[x, x+1)$ offen ist, gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $B_x \in \mathcal{B}'$ sodass $x \in B_x \subset [x, x+1)$. Ist $x < y$, so ist $x \notin B_y$. Somit ist $B_x \neq B_y$. Da $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, ist die Teilmenge $\{B_x : x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{B}'$ nicht abzählbar, also auch $\mathcal{B}'$ nicht. □

Der Begriff der Umgebung ist zentral in der Topologie.

Definition 1.22. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Sei $x \in X$. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, falls es eine offene Menge O gibt derart, dass

$$x \in O \subset U \ .$$

Mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnen wir die Menge der Umgebungen von x. Man nennt $\mathcal{U}(x)$ auch den *Umgebungsfilter* von x. Damit hat $\mathcal{U}(x)$ folgende Eigenschaften:

(a) $x \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$,

(b) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in U(x)$,

(c) $U \in \mathcal{U}(x), U \subset V \subset X \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$.

Definition 1.23. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und sei $x \in X$. Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}(x)$, also eine Menge von Umgebungen von x, heißt *Umgebungsbasis* von x, falls zu jeder Umgebung U von x ein $B \in \mathcal{B}$ existiert derart, dass $B \subset U$.

Ist also eine Umgebungsbasis $\mathcal{B}$ von x gegeben, so besteht der Umgebungsfilter gerade aus den Obermengen von Elementen auf $\mathcal{B}$.

Definition 1.24. Ein topologischer Raum X erfüllt das *1. Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Beispiel 1.25. Jeder metrische Raum M erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Zu $x \in M$ ist $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis.

Natürlich impliziert das zweite Abzählbarkeitsaxiom das erste (beweisen Sie das!). Die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom (Begründung!) aber nicht das zweite. Die beiden Abzählbarkeitsaxiome erlauben uns, die Größe von topologischen Räumen zu vergleichen. Später werden wir einen dritten Begriff, die Separabilität, kennenlernen.

Damit schließen wir unseren ersten Abschnitt über topologische Räume und die Erzeugung von Topologien. Als historische Anmerkung sei erwähnt, dass die Definition eines topologischen Raumes von Felix Hausdorff (1868 – 1942) stammt. Er veröffentlichte 1914 das Buch "Grundzüge der Mengenlehre" in dem die Axiome des topologischen Raumes zum ersten Mal formuliert werden. Die des metrischen Raumes stammen von Maurice Fréchet (1878 – 1973) aus dem Jahr 1906; der Name "metrischer Raum" wurde von Hausdorff geprägt.

2 Die topologischen Operationen

In diesem Abschnitt lernen wir einige topologische Operationen kennen und zeigen, wie man mit ihnen umgeht. Auch sehen wir, dass die Sorgenfrey-Topologie ein erstes Beispiel einer nicht metrischen Topologie ist. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum.

Satz 2.1. Sei $A \subset X$. Dann ist

$$A^\circ := \bigcup_{\substack{O \text{offen} \\ O \subset A}}$$

die größte offene Menge in X, die in A enthalten ist. Sie heißt das *Innere* von A. Es gelten folgende Eigenschaften:

(a) $A^\circ = \{x \in A : \exists\, U \in \mathcal{U}(x), U \subset A\}$;

(b) $A = A^\circ \Leftrightarrow A$ ist offen;

(c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Beweis: Die Menge A° ist offen als Vereinigung offener Mengen. Aus der Definition folgt, dass $A^\circ \subset A$. Ist O irgendeine offene Menge derart, dass $O \subset A$, so gilt $O \subset A^\circ$ nach Definition von A°. Damit ist A° die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

(a) "$\subset$" Sei $x \in A^\circ$. Damit gibt es $O \subset A$ offen derart, dass $x \in O$. Somit ist $O \in \mathcal{U}(x)$ und $O \subset A$. Damit ist x in der Menge auf der rechten Seite.
"$\supset$" Sei $x \in A$, sodass $U \subset A$ für eine Umgebung U von x. Da U eine Umgebung von x ist, gibt es eine offene Menge $O \subset X$ derart, dass $x \in O \subset U$. Damit ist $O \subset A$ und somit $x \in A^\circ$.

(b) folgt aus der Definition.

(c) Da A° offen ist, ist $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

(d) "$\subset$" Da $(A \cap B)^\circ \subset A$ und $(A \cap B)^\circ$ offen ist, ist $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$. Genauso sieht man, dass $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$. Folglich $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. "$\supset$" $A^\circ \cap B^\circ$ ist offen als Durchschnitt zweier offener Mengen. Da $A^\circ \subset A$ und $B^\circ \subset B$ ist $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. Somit ist $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$ nach Definition von $(A \cap B)^\circ$.

$\square$

Ist $A \subset X$, so nennen wir $A^c := X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$ die *Komplementärmenge* von A.

Definition 2.2. Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls A^c offen ist.

Aus den Axiomen des topologischen Raumes und den offensichtlichen Regeln

$$\begin{aligned} \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c &= \bigcap_{i\in I} A_i^c \,, \\ \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c &= \bigcup_{i\in I} A_i^c \,, \end{aligned}$$

folgt, dass die Menge $\mathcal{A}$ der abgeschlossenen Teilmengen von X folgende Permanenzeigenschaften erfüllt:

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$;

(c) $A_i \in \mathcal{A}, i \in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Die abgeschlossenen Teilmengen von X sind also abgeschlossen bzgl. beliebiger Durchschnittsbildung und endlicher Vereinigung.

Dual zu Satz 2.1 gilt Folgendes:

Satz 2.3. Sei $A \subset X$. Dann ist

$$\bar{A} := \bigcap_{\substack{A \subset B \\ B \text{abg.}}} B$$

die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst. Sie heißt die *abgeschlossene Hülle* oder *der Abschluss von* A. Es gelten folgende Eigenschaften:

(a) $\bar{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\}$;

(b) $(A^c)^- = (A^\circ)^c$, $(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$;

(c) A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \bar{A}$;

(d) $(\bar{A})^- = \bar{A}$;

(e) $(A \cup B)^- = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Beweis: Die Menge $\bar{A}$ ist abgeschlossen als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen und umfasst A nach Definition. Ist B abgeschlossen und umfasst A, so gilt $\bar{A} \subset B$ nach Definition. Damit ist $\bar{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.

(a) Sei $B := \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\}$. Dann gilt $A \subset B$. Ferner ist

$$B^c = \{x \in X : \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \quad U \subset A^c\} = (A^c)^\circ \ .$$

Damit ist B^c offen und somit B abgeschlossen. Sei C abgeschlossen mit $A \subset C$. Wir wollen zeigen, dass $B \subset C$; das ist gleichbedeutend mit $C^c \subset B^c$. Sei $x \in C^c$. Da C^c offen ist, gibt es $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset C^c$; also $U \cap C = \emptyset$. Da $A \subset C$, folgt dass $U \cap A = \emptyset$. Somit ist $x \notin B$. Damit haben wir gezeigt, dass B die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A umfasst; also $B = \bar{A}$.

(b) $(A^c)^-$ ist die kleinste abgeschlossene Menge die A^c umfasst. Damit ist $((A^c)^-)^c$ die größte offene Menge in $A = (A^c)^c$, d.h. es ist $((A^c)^-)^c = A^\circ$.

Damit ist $(A^c)^- = (A^\circ)^c$. Das ist die erste Aussage von (b). Wenden wir sie auf A^c an, so finden wir $((A^c)^\circ)^c = (A^{cc})^- = \bar{A}$. Somit ist durch Komplementbildung $(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$. Das ist die zweite Aussage von (b).

(c) folgt aus der Definition und (d) aus (c).

(d) Wenden wir Satz 2.1 (c) auf A^c und B^c an, so erhalten wir $(\bar{A} \cup \bar{B})^c = (\bar{A})^c \cap (\bar{B})^c = (A^c)^\circ \cap (B^c)^\circ = (A^c \cap B^c)^\circ$. Damit ist $\bar{A} \cup \bar{B} = [(A^c \cap B^c)^\circ]^c = [(A^c \cap B^c)^c]^- = [A^{cc} \cup B^{cc}]^- = (A \cup B)^-$, wobei wir (b) zweimal benutzt haben.

$\square$

Für jede Menge $A \subset X$ gilt

$$A^\circ \subset A \subset \bar{A}\ .$$

Definition 2.4. Die Menge $\partial A := \bar{A} \setminus A^\circ$ heißt der *Rand* von A.

Eigenschaften 2.5. (a) $\partial A = \partial A^c$;

(b) ∂A ist abgeschlossen;

(c) $\bar{A} = A \cup \partial A$;

(d) $\partial A = \{x \in A : \forall\ U \in \mathcal{U}(x) \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset \text{ und } U \cap A^c \neq \emptyset\}$.

Beweis: (a)
$$\begin{aligned} \partial A^c &= (A^c)^- \setminus (A^c)^\circ \\ &= (A^\circ)^c \setminus (\bar{A})^c \\ &= (A^\circ)^c \cap \bar{A} = \bar{A} \setminus A^\circ \\ &= \partial A\ . \end{aligned}$$

(b) $\partial A = \bar{A} \cap (A^\circ)^c$ ist abgeschlossen als Durschschnitt zweier abgeschlossener Mengen.

(c) $\bar{A} \setminus A^\circ = \partial A$ nach Definition. Damit ist $\partial A \cup A^\circ = A^-$.

(d) Es ist $\partial A = \bar{A} \cap (A^\circ)^c = \bar{A} \cap (A^c)^-$. Da $(A^c)^- = \{x \in X : U \cap A^c \neq \emptyset \ \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\}$ und $A^- = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\}$ folgt die Behauptung.

□

Aufgabe 2.6. Sei $(E, \|\ \|)$ ein normierter Raum, $r > 0, B(0,r) := \{x \in E : \|x\| < r\}$. Zeige: a) $B(0,r)$ ist offen;
b) $(B(0,r))^- = \{x \in E : \|x\| \leq r\} =: \bar{B}(0,r)$;
c) $\partial B(0,r) = \{x \in E : \|x\| = r\}$.

Definition 2.7. a) Eine Teilmenge A von X heißt *dicht* falls $\bar{A} = X$.
b) Der topologische Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Satz 2.8. a) Hat X eine abzählbare Basis, so ist X separabel.
b) Ist ein metrischer Raum separabel, so hat er eine abzählbare Basis.

Beweis: a) Sei $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Basis mit $B_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist jede nicht-leere offene Menge ist eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$. Wähle $x_n \in B_n$. Dann ist $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X; d.h. $\bar{A} = X$. Sei nämlich $x \in X$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$, sodass $B_m \subset U$. Damit ist $U \cap A \supset B_m \cap A$. Also ist $x_m \in U \cap A$ und somit $U \cap A \neq \emptyset$. Wir haben gezeigt, dass $x \in \bar{A}$.
b) Sei $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X. Dann ist $\mathcal{B} := \{B(x_n, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$. Denn sei O offen. Zu $x \in O$ gibt es dann $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $B(x, \frac{2}{m}) \subset O$. Da $\bar{A} = X$, ist aber $B(x, \frac{1}{m}) \cap A \neq \emptyset$. Damit gibt es $n \in \mathbb{N}$ sodass $d(x, x_n) < \frac{1}{m}$. Folglich ist $x \in B(x_n, \frac{1}{m})$. Für $y \in B(x_n, \frac{1}{m})$ gilt $d(y,x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{2}{m}$. Damit ist $y \in B(x, \frac{2}{m}) \subset O$. Wir haben gezeigt, dass zu beliebigem $x \in O$ Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ existieren derart, dass $x \in B(x_n, \frac{1}{m}) \subset O$. Damit ist O eine Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$. □

Ein metrischer Raum hat somit genau dann eine abzählbare Basis wenn er separabel ist. Wir zeigen im nächsten Beispiel, dass die Aussage b) in allgemeinen topologischen Räumen nicht gültig ist. Sie ist z.B. falsch in $\mathbb{R}$ bzgl. der Sorgenfrey-Topologie. Damit ist diese Topologie nach Satz 2.8(a) nicht *metrisierbar*; d.h. es gibt keine Metrik auf $\mathbb{R}$, die die Sorgenfrey-Topologie induziert.

Beispiel 2.9. Betrachte $\mathbb{R}$ mit der Sorgenfrey-Topologie $\mathcal{O}_S$. Wir hatten gesehen, dass $\mathcal{O}_S$ keine abzählbare Basis besitzt (1.21). Aber $\mathbb{Q}$ ist dicht in $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$. Denn sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $U \in \mathcal{U}(x)$ Dann gibt es $-\infty < a < b < \infty$ derart, dass

$$x \in [a, b) \subset U \ .$$

Damit ist $\mathbb{Q} \cap U \supset \mathbb{Q} \cap [a, b) \neq \emptyset$. Folglich ist $x \in \bar{\mathbb{Q}}$ nach Satz 2.3(a). Aus Satz 2.8b) folgt, dass die Sorgenfrey-Topologie nicht durch eine Metrik definiert ist.

Das Beispiel 2.9 ist kein Grund zur Sorge: Wir werden lernen wie man mit nicht-metrischen Topologien umgeht.

Definition 2.10 (Hausdorffraum)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt *Hausdorffraum* (oder *Hausdorffsch*) falls es zu jedem $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ offene Mengen O_1 und O_2 gibt mit $x_1 \in O_1, x_2 \in O_2$ aber $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Statt Hausdorffraum sagt man auch oft, dass $(X, \mathcal{O})$ *das Trennungsaxiom* T_2 *erfüllt.*

Aufgabe 2.11. Ist X ein Hausdorffraum und $A \subset X$ endlich, so ist A abgeschlossen.

Aufgabe 2.12. Sei X ein Hausdorffraum $A \subset X$ und $x \in \bar{A} \setminus A$. Zeige: Ist U eine Umgebung von x, so ist $U \cap A$ unendlich.

Beispiel: Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum.

3 Konvergenz

In diesem Abschnitt sei X ein Hausdorffraum. Wir werden konvergente Folgen definieren und sehen, dass sie im Allgemeinen nicht ausreichen, um topologische Eigenschaften zu beschreiben. Daher führen wir zusätzlich verallgemeinerte Folgen oder Netze ein. Als wichtiges Beispiel lernen wir in diesem Abschnitt die Topologie der punktweisen Konvergenz kennen.

Definition 3.1 (Konvergenz von Folgen)**.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X.

a) Sei $x \in X$. Wir sagen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen x konvergiert* und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{oder} \quad x_n \to x \quad (n \to \infty) ,$$

falls es zu jeder Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, falls es $x \in X$ gibt derart, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x .$$

Bemerkung 3.2 (Eindeutigkeit des Limes)**.** Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert. Hierzu brauchen wir das T_2-Axiom: Seien $x, y \in X$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Seien O_1, O_2 offen, sodass $x \in O_1, y \in O_2$. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sodass $x_n \in O_1$ für $n \geq n_1$ und $x_n \in O_2$ für $n \geq n_2$. Somit ist $x_n \in O_1 \cap O_2$ für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Insbesondere ist $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Da nach Voraussetzung X Hausdorffsch ist, folgt dass $x = y$. $\square$

Beispiel 3.3. a) Sei (M, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $x \in M$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.
b) Es sei $\mathcal{O}$ die diskrete Topologie. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ genau dann wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $x_n = x$ für alle $n \geq n_0$.

Man kann in einem metrischen Raum den Abschluss einer Menge durch Folgenkonvergenz beschreiben.

Satz 3.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $A \subset M$.

a) Sei $x \in M$. Dann ist $x \in \bar{A}$ genau dann, wenn es $x_n \in A$ gibt derat, dass $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

b) A ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt:

$$x_n \in A, \lim_{n\to\infty} x_n = x \;\Rightarrow\; x \in A \; .$$

Beweis: a) "$\Rightarrow$" Sei $x \in \bar{A}$. Dann ist nach Satz 2.3(a) $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Dann ist $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
"$\Leftarrow$" Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in A$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Aus Satz 2.3(a) folgt, dass $x \in \bar{A}$.
b) folgt aus a). $\square$

Es ist aus dem Beweis offensichtlich, dass Satz 3.4 in einem topologischen Raum gültig bleibt, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. In allgemeinen topologischen Räumen ist er allerdings falsch, wie das folgende Beispiel zeigt. Es gibt uns den Anlass, eine wichtige Topologie einzuführen.

Beispiel 3.5 (die Topologie der punktweisen Konvergenz)**.** Sei Ω eine Menge. Mit $\mathcal{F}(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller beliebigen reellwertigen Funktionen auf Ω. Sei $f \in \mathcal{F}(\Omega), \varepsilon > 0$. Für jede endliche Teilmenge $\omega \subset \Omega$ betrachten wir die Menge

$$B(f, \omega, \varepsilon) := \{g \in \mathcal{F}(\Omega) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in \omega\} \; .$$

Eine Menge $O \subset \mathcal{F}(\omega)$ heißt offen, falls gilt:
Ist $f \in O$, so gibt es $\varepsilon > 0$ und $\omega \subset \Omega$ endlich, derart dass $B(f, \omega, \varepsilon) \subset O$.
Man prüfe nach, dass diese Definition zu einer Topologie auf $\mathcal{F}(\Omega)$ führt.

Diese Topologie hat folgende Eigenschaften.
a) Die Mengen $B(f,\omega,\varepsilon)$ sind offen.
b) Seien $f_n, f \in \mathcal{F}(\Omega)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \Omega \ .$$

Somit konvergiert also eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. der eben eingeführten Topologie gegen f genau dann, wenn sie punktweise gegen f konvergiert.
c) Sei Ω unendlich und sei

$$\mathcal{F}_0 := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in \Omega\} \ .$$

Dann ist $\mathcal{F}_0$ dicht in $\mathcal{F}(\Omega)$.
d) Sei Ω überzählbar und sei $f(x) = 1$ für alle $x \in \Omega$. Dann gibt es keine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}_0$ derart, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, obwohl nach c) $f \in \overline{\mathcal{F}_0}$.

Beweis: a) Sei $g \in B(f,\omega,\varepsilon)$. Dann ist $\delta = \varepsilon - \max\limits_{x\in\omega} |f(x) - g(x)| > 0$. Sei $h \in B(g,\omega,\delta)$. Dann ist für $y \in \omega$, $|h(y)-f(y)| \le |h(y)-g(y)|+|g(y)-f(y)| < \delta + \max\limits_{x\in\omega} |g(x) - g(\omega)| = \varepsilon$. Somit ist $h \in B(f,\omega,\varepsilon)$. Wir haben gezeigt, dass $B(g,\omega,\delta) \subset B(f,\omega,\varepsilon)$.
b) "$\Rightarrow$" Sei $x \in \Omega, \varepsilon > 0$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ und da $B(f,\{x\},\varepsilon)$ eine offene Umgebung von f ist, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $f_n \in B(f,\{x\},\varepsilon)$ für alle $n \ge n_0$. Somit ist $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
"$\Leftarrow$" Sei $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. Sei U eine Umgebung von f. Dann gibt es $\varepsilon > 0, \omega \subset \Omega$ endlich derart, dass $B(f,\omega,\varepsilon) \subset U$. Zu jedem $x \in \omega$ gibt es $n(x) \in \mathbb{N}$, sodass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \ge n(x)$. Sei $n_0 = \max\{n(x) : x \in \omega\}$. Dann ist $f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \omega$ und alle $n \ge n_0$. Somit ist $f_n \in B(f,\omega,\varepsilon) \subset U$ für alle $n \ge n_0$. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.
c) Sei $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ und sei U eine Umgebung von f. Wie müssen zeigen, dass $U \cap \mathcal{F}_0 \neq 0$. Es gibt $\omega \subset \Omega$ endlich, $\varepsilon > 0$, sodass $B(f,\omega,\varepsilon) \subset U$. Definiere $g \in \mathcal{F}_0$ durch $g(x) = f(x)$ für $x \in \omega$ und $g(x) = 0$ wenn $x \in \Omega \setminus \omega$. Dann ist $g \in B(f,\omega,\varepsilon) \cap \mathcal{F}_0 \subset U \cap \mathcal{F}_0$. Da U eine beliebige Umgebung von f ist, folgt, dass $f \in \overline{\mathcal{F}_0}$.

d) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0$ eine beliebige Folge in $\mathcal{F}_0$. Dann ist $\omega := \{x \in \Omega : \exists\, n \in \mathbb{N}$ sodass $f_n(x) \neq 0\} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : f_n(x) \neq 0\}$ abzählbar, als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen. Für $x \in \Omega \setminus \omega$ ist $f_n(x) = 0 \neq f(x)$. Damit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen f. $\square$

Das vorangehende Beispiel zeigt, dass Folgen i.A. nicht ausreichen, um den Abschluss einer Menge zu beschreiben. Wir führen daher nun den Begriff der verallgemeinerten Folgen oder Netze ein. Er basiert auf folgender Definition.

Definition 3.6. 1. Eine *geordnete Menge* ist eine Menge I zusammen mit einer Relation, die folgende Eigenschaften erfüllt:

a) $i \preceq i$ (Reflexivität),

b) $i \preceq j$ und $j \preceq i \Rightarrow i = j$ (Antisymmetrie),

c) für alle $i, j, k \in I$, $i \preceq j, j \preceq k \Rightarrow i = k$ (Transitivität).

2. Eine *gerichtete Menge* ist eine Menge I mit einer Relation $\preceq$ derart, dass a), c) gilt und zu jedem Paar $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert mit $i \preceq k$ und $j \preceq k$. Eine gerichtete Menge muß also nicht antisymmetrisch sein.

Beispiel 3.7. a) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist eine gerichtete Menge;
b) $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ ist bzgl. der üblichen $\leq -$ Relation eine gerichtete Menge,
c) $(0, \infty)$ ist eine gerichtete Menge bzgl. $i \preceq j :\Leftrightarrow j \leq i$.
d) Eine geordnete Menge $(I, \preceq)$ heißt *total geordnet*, falls für jedes Paar $i, j \in I$ gilt $i \preceq j$ oder $j \preceq i$.
Die Mengen in a), b), c) sind alle total geordnet. Jede total geordnete Menge ist gerichtet.
e) Sei X eine Menge und $I \subset \mathcal{P}(X)$, sodass mit $i, j \in I$ auch $i \cap j \in I$. Dann ist I gerichtet bzgl. $i \preceq j :\Leftrightarrow j \subset i$.

f) Sei X eine Menge und $I = \{i \subset X : i \text{ ist endlich}\}$. Dann ist I gerichtet bzgl. der Relation

$$i \preceq j :\Leftrightarrow i \subset j \ .$$

g) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Sei $\mathcal{B}$ eine Umgebungsbasis von x. Dann ist $\mathcal{B}$ gerichtet bzgl.

$$U \preceq V :\Leftrightarrow V \subset U \ .$$

Nun können wir die Konvergenz von verallgemeinerten Folgen definieren. Im Folgenden sei X ein Hausdorffraum.

Definition 3.8. a) Ein *Netz* ist eine Abbildung $\underline{x} : I \to X$ wobei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge ist. Man schreibt $x_i := \underline{x}(i)$ und $\underline{x} = (x_i)_{i \in I}$.
b) Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X und sei $x \in X$. Man sagt, dass $(x_i)_{i \in I}$ *gegen x konvergiert* und schreibt

$$\lim_I x_i = x$$

falls zu jeder Umgebung U von x ein $i_\circ \in I$ existiert derart, dass $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_\circ$.

Hier definieren wir $i \succeq i_\circ :\Leftrightarrow i_\circ \preceq i$. Ein anderes Wort für Netz ist *verallgemeinerte Folge*.

Bemerkung 3.9. Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge.
a) Sei zu jedem $i \in I$ eine Aussage $A(i)$ gegeben. Wir sagen, dass $A(i)$ *schließlich wahr* ist, wenn es ein $i_\circ \in I$ gibt, sodass $A(i)$ für alle $i \succeq i_\circ$ wahr ist.
b) Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz und sei $x \in X$.
Dann gilt $\lim_{i \in I} x_i = x$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von x das Folgenglied x_i schließlich in U liegt.

Bemerkung 3.10 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** Da wir voraussetzen, dass X Hausdorffsch ist, hat jedes Netz höchstens einen Grenzwert. Das sieht man genau wie bei Folgen (siehe refbem3.2).

Mit Hilfe von Netzen können wir nun den Abschluss einer Menge wie gewohnt beschreiben.

Satz 3.11. Sei $A \subset X$ und sei $x \in X$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $x \in \bar{A}$;

(ii) es gibt ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in A derart, dass $\lim\limits_{I} x_i = x$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $x \in \bar{A}$. Dann ist $\mathcal{U}(x)$ gerichtet bezüglich $U \succeq V :\Leftrightarrow U \subset V$. Da $x \in \bar{A}$, gibt es zu $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in A \cap U$. Es ist $\lim\limits_{\mathcal{U}} x_U = x$ nach der Definition des Limes.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Sei $x = \lim\limits_{I} x_i$ mit $x_i \in A$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es $i_\circ \in I$, sodass $x_i \in U$ für $i \succeq i_\circ$. Es ist also $U \cap A \neq \emptyset$ da $x_{i_\circ} \in U$. Damit ist $x \in \bar{A}$ nach Satz 2.3a). $\square$

Wir haben im obigen Beweis das Auswahlaxiom benutzt.
Auswahlaxiom. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen, $I \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Abbildung $f : I \to \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ mit $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$.

Es handelt sich um ein Axiom der Mengenlehre, das gleichwertig zum folgenden Wohlordnungssatz ist. Eine geordnete Menge $(X, \preceq)$ heißt **wohlgeordnet**, wenn jede nicht-leere Teilmenge A von X ein kleinstes Element besitzt (d.h. es gibt $a_\circ \in A$, sodass $a_\circ \preceq a$ für alle $a \in A$). Jede wohlgeordnete Menge ist total geordnet.

Satz von Zermelo (Wohlordnungssatz). Jede Menge besitzt eine Wohlordnung.

Wir wollen Satz 3.11 an einem weiteren Beispiel erläutern.

Beispiel 3.12 (Ordinalzahlen)**.** Es gibt eine überabzählbare wohlgeordnete Menge $(\Omega, \preceq)$, so dass gilt:

1. Ω besitzt ein Maximum ω_1; d.h. $\omega_1 \in \Omega$ und $\alpha \preceq \omega_1$ für alle $\alpha \prec \omega_1$.
2. $[1,\alpha)$ ist abzählbar für alle $\alpha \prec \omega_1$. Hier ist $1 = \min \Omega$ und $[1,\alpha) := \{\beta \in \Omega : 1 \preceq \beta < \alpha\}$.
Wir schreiben $\beta \prec \alpha$ falls $\beta \preceq \alpha$ und $\beta \neq \alpha$.

Beweis: Sei $\preceq$ eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$.
1. *Fall:* Es gibt $\gamma_\circ \in \mathbb{R}$ derart, dass $[1,\gamma)$ überzählbar ist. Setze $w_1 = \min\{\gamma \in \mathbb{R} : [1,\gamma_\circ)$ ist überzählbar$\}$, dann erfüllt $\Omega := [1,\omega_1]$ die Anforderung 1. und 2.
2. *Fall:* $[1,\alpha)$ ist abzählbar für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Setze $\Omega := \mathbb{R} \cup \{\omega_1\}$ und definiere $\alpha \preceq \omega_1$ für alle $\alpha \in \Omega$. Dann ist Ω wohlgeordnet. Ferner ist $\Omega = [1,\omega_1]$ und Ω ist überzählbar, da $\mathbb{R} \subset \Omega$. $\square$

Folgerung: Es ist $\alpha + 1 \prec \omega_1$ für alle $\alpha \in \Omega$. Hier ist $\alpha + 1 := \min\{\beta \in \Omega : \beta \succ \alpha\}$ der Nachfolger von α. Wäre nämlich $\alpha + 1 = \omega_1$, so wäre $\Omega = [1,\alpha) \cup \{\omega_1\}$ abzählbar.

Ordnungstopologie: Die Ordnungstopologie auf Ω ist von den Ordnungsintervallen $[1,\alpha) := \{\beta \in \Omega : 1 \preceq \beta \prec \alpha\}$, $(\alpha,\omega_1]\{:= \beta \in \Omega : \alpha \prec \beta\}$, $\alpha \in \Omega$, und $[1,\omega_1] := \Omega$ erzeugte Topologie. Die Menge dieser Ordnungsintervalle ist durchschnittsstabil. Somit ist eine Teilmenge von Ω genau dann offen, wenn sie Vereinigung von Ordnungsintervallen der obigen Form ist.

Eigenschaften: 1. $\{(\alpha,\omega_1] : \alpha < \omega_1\}$ ist eine Umgebungsbasis von ω_1.
2. $[1,\omega_1)$ ist dicht in $[1,\omega_1]$.
3. Jede Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ω_1 konvergiert ist *stationär*, d.h. es gibt $n_\circ \in \mathbb{N}$, sodass $\alpha_n = \omega_1$ für alle $n \geq n_\circ$.
4. Insbesondere gibt es keine Folge in $A := [1,\omega_1)$ die gegen ω_1 konvergiert, obwohl $\omega_1 \in \bar{A}$.

Beweis: 1. Die Ordnungsintervalle, die ω_1 enthalten sind gerade von der

Form $(\alpha, \omega_1], \alpha \in \Omega, \alpha < \omega_1$.
2. $I := [1, \omega_1)$ ist eine gerichtete Menge und $\alpha_i := i$ definiert ein Netz in $[1, \omega_1)$. Es ist $\lim\limits_I \alpha_i = \omega_1$. Denn ist U eine Umgebung von ω_1, so gibt es $i_\circ \prec \omega_1$, sodass $(i_\circ, \omega_1) \subset U$. Damit ist $\alpha_1 \in (i_\circ, \omega_1) \subset U$ falls $i \succeq i_\circ + 1$. Nach Satz 3.11 ist somit $w_1 \in \overline{[1, \omega_1)}$. Wir könnten aber auch direkt argumentieren: Sei U eine Umgebung von ω_1. Dann ist $(\alpha, \omega_1] \subset U$ für ein $\alpha \prec \omega_1$. Damit ist $\alpha + 1 \in U \cap [1, \omega_1)$.
3. Sei $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Ω und sei $I = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \prec \omega_1\}$. Dann ist $B := \bigcup\limits_{n \in J} [1, \alpha_n)$ abzählbar und für $\beta \in B$ ist $[1, \beta) \subset B$. Damit ist $B = [1, \gamma)$ mit $\gamma = \min(\Omega \setminus B)$. Da B abzählbar ist, ist $\gamma \prec \omega_1$. Damit ist $(\gamma \prec \omega_1]$ eine Umgebung von ω_1. Ist nun $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \omega_1$, so gibt es $n_\circ \in \mathbb{N}$, sodass $\alpha_n \in (\gamma, \omega_1]$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $\alpha_n = \omega_1$ für alle $n \geq n_\circ$. $\square$

Wir wollen die Konvergenz von Netzen am Beispiel der punktweisen Konvergenz testen.

Beispiel 3.13 (Punktweise Konvergenz von Netzen)**.** Sei Ω eine Menge. Wir betrachten die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathcal{F}(\Omega)$, siehe Beispiel 3.5.
Sei $(f_i)_{i \in I}$ ein Netz in $\mathcal{F}(\Omega)$, und sei $f \in \mathcal{F}(\Omega)$. Dann gilt

$$\lim_I f_i = f \text{ genau dann, wenn } \lim_I f_i(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \Omega \ .$$

Das prüft man leicht wie in Beispiel 3.5 nach.

Aufgabe 3.14. Sei $f : (0, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $(f(i))_{i \in (0,b]}$ ein Netz, wenn auf $I = (0, b]$ gesetzt wird

$$i \succeq j :\Leftrightarrow j < i \ .$$

Sei $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. $\lim\limits_I f(i) = c$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,

3. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodass $0 < x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Aufgabe 3.15 (Cauchy-Kriterium)**.** Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $i_0 \in I$ existiert, sodass

$$|x_i - x_j| \leq \varepsilon \text{ wenn } i \succeq i_0, j \succeq i_0 \ .$$

4 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Hausdorff-Räume X und Y.

Definition 4.1. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.
a) Sei $x \in X$. Dann heißt f *stetig* in x, wenn $\lim_I x_i = x \Rightarrow \lim_I f(x_i) = f(x)$ für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X.
b) f heißt *stetig*, wenn f in jedem $x \in X$ stetig ist.

Satz 4.2. Sei $x \in X$. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann in x stetig, wenn gilt: Zu jeder Umgebung V von $f(x)$ gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei f in x stetig. Ist die Behauptung falsch, so gibt es eine Umgebung V von $f(x)$, sodass $f(U) \not\subset V$ für jede Umgebung U von x. Damit gibt es zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in U$, sodass $f(x_U) \notin V$. Das Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ konvergiert gegen x, aber $(f(x_U))_{U \in \mathcal{U}(x)}$ konvergiert nicht gegen $f(x)$.
"$\Leftarrow$" Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz mit $\lim_I x_i = x$. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Da $\lim_I x_i = x$, gibt es $i_0 \in I$, so dass $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_0$. Damit ist $f(x_i) \in V$ für $i \succeq i_0$. Wir haben gezeigt, dass $\lim_I f(x_i) = f(x)$. $\square$

Nun können wir die Stetigkeit folgendermaßen charakterisieren.

Satz 4.3. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist stetig;

(ii) $f^{-1}(O)$ ist offen in X, wenn $O \subset Y$ offen ist;

(iii) $f^{-1}(B)$ ist abgeschlossen in X für jede abgeschlossene Teilmenge B von Y;

(iv) $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle Teilmengen von A von X.

Beweis: “$(i) \Rightarrow (iv)$” Sei $x \in \bar{A}$. Dann gibt es ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in A, sodass $\lim\limits_I x_i = x$. Da f stetig in x ist, gilt $\lim\limits_I f(x_i) = f(x)$. Damit ist $f(x) \in \overline{f(A)}$.
“$(iv) \Rightarrow (iii)$” Sei $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. Aus der Voraussetzung folgt

$$f(x) \in \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \bar{B} = B\ .$$

Damit ist $x \in f^{-1}(B)$. Wir haben gezeigt, dass $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$.
“$(iii) \Rightarrow (ii)$” Sei O offen. Dann ist O^c abgeschlossen. Somit ist nach Voraussetzung $f^{-1}(O^c) = (f^{-1}(O))^c$ abgeschlossen; d.h. $f^{-1}(O)$ ist offen.
“$(ii) \Rightarrow (i)$” Sei $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Dann gibt es O offen mit $f(x) \in O \subset V$. Folglich ist $x \in f^{-1}(O) =: U$. Aus der Voraussetzung folgt, dass U eine offene Umgebung von x ist. Da $f(U) \subset O \subset V$ haben wir die Bedingung von Satz 4.2 nachgewiesen. □

Im metrischen Raum ist Stetigkeit zu Folgenstetigkeit äquivalent.

Aufgabe 4.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $f : M \to X$ eine Funktion, $x \in M$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$;

(ii) f ist stetig in x.

Aufgabe 4.5. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion; $x \in X$ habe eine abzählbare Umgebungsbasis. Sei f *folgenstetig* in x; d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Zeige, dass f stetig in x ist.

Beispiel 4.6. Betrachte $\Omega = [1, \omega_1]$ aus Beispiel 3.12. Definiere $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $f(\alpha) = 1$ wenn $\alpha \prec \omega_1, f(\omega_1) = 0$. Dann ist f folgenstetig in ω_1, da jede gegen ω_1 konvergente Folge stationär ist. Aber f ist nicht stetig in ω_1, da es ein Netz $(\alpha_i)_{i\in I}$ in $[1, \omega_1)$ gibt mit $\lim\limits_I \alpha_i = \omega_1$ und somit $f(\alpha_i) = 0 \neq f(\omega_1) = 1$ für alle $i \in I$.

Zwischen beliebigen (nicht-notwendigerweise Hausdorff-) Topologien definiert man Stetigkeit über Satz 4.3(ii).

Definition 4.7. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig* falls $f^{-1}(O)$ offen ist für jede offene Menge O in Y.

Satz 4.8. Die Verknüpfung stetiger Abbildungen ist stetig.

Beweis: Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig. Sei $O \subset Z$ offen. Dann ist $g^{-1}(O)$ offen in Y, also ist $f^{-1}(g^{-1}(O))$ offen in X. Da $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)))$ ist der Satz bewiesen. $\square$

Definition 4.9. Seien X, Y topologische Räume. Ein *Homöomorphismus* ist eine stetige bijektive Abbildung $f : X \to Y$, sodass $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist.

Man sagt, dass zwei topologische Räume X, Y *homöomorph* sind, wenn es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt.

Sei $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus. Dann ist eine Teilmenge A von X genau dann offen, wenn $f(A)$ offen ist. Alle topologischen Eigenschaften von X übertragen sich auf Y. Ist z.B. $A \subset X$ so ist $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}, f(\partial A) = \partial f(A)$.

Aufgabe 4.10. Wir betrachten auf offenen Intervallen in $\mathbb{R}$, die durch die natürliche Metrik induzierte Metrik.

1. Sei $f : \mathbb{R} \to (a, b)$ streng monoton stetig und surjektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus. Hier ist $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Konkrete Beispiele sind:

   a) $f(x) = \arctan x, a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}$;

   b) $f(x) = e^x, a = 0, b = \infty$.

2. $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ definiert einen Homöomorphismus.

5 Neue Topologien

Zunächst betrachten wir die Initialtopologie bzgl. einer Abbildung.

Definition 5.1. a) Sei Y ein topologischer Raum, $f : X \to Y$ eine Abbildung, X eine Menge. Dann ist

$$\mathcal{O} := \{f^{-1}(O) : O \subset Y \text{ offen}\}$$

die gröbste Topologie auf X, sodass f stetig ist. Sie heißt die *Initialtopologie* bzgl. f.
b) Ist $X \subset Y$ und $f(x) = x$, so heißt $\mathcal{O}$ die *relative Topologie* (bzgl. Y) auf X.

Bemerkung 5.2. Sei Y ein topologischer Raum, $X \subset Y$ mit der relativen Topologie. Sei $A \subset X$.
a) A ist relativ offen $\Leftrightarrow \exists\, O \subset Y$ offen $A = O \cap X$.
b) A ist relativ abgeschlossen in X genau dann, wenn es eine abgeschlossene Teilmenge B von Y gibt derart, dass $A = B \cap X$.
c) A ist relativ abgeschlossen in X genau dann, wenn gilt:

$$\lim_I x_i = x \textbf{ und } \mathbf{x \in X} \Rightarrow x \in A\ ,$$

für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in A.
d) Sei $X \subset Y$ offen. Dann ist $A \subset X$ genau dann relativ offen, wenn A offen in Y ist.

Beweis: a) Es ist $f(x) = x, x \in X$. Somit ist für $O \subset Y, f^{-1}(O) = O \cap X$. Damit ist $\mathcal{O} = \{O \cap X : O \subset Y \text{ offen}\}$.
b) $A \subset X$ ist relativ abgeschlossen $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\exists\, O \subset Y \text{ offen}\ , \quad X \setminus A = O \cap X \Leftrightarrow \\ &\exists\, O \subset Y \text{ offen}\ , \quad A = O^c \cap X\ . \end{aligned}$$

c) folgt aus b).
d) folgt aus a). □

Beispiel 5.3. $Y = \mathbb{R}, \quad X = [0,1)$. Dann ist
$A = [0, \frac{1}{2})$ ist relativ offen, und
$A = [\frac{1}{2}, 1)$ ist relativ abgeschlossen.

Die Initialtopologie bzgl. einer Familie von Abbildungen ist folgendermaßen definiert:

Satz 5.4 (Initialtopologie)**.** Sei X eine Menge, A eine Indexmenge und seien für $\alpha \in A$ topologische Räume Y_α mit Abbildungen $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ gegeben. Dann gibt es eine gröbste Topologie $\mathcal{O}$ auf X bzgl. derer alle f_α stetig sind. Das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{\alpha \in B} f_\alpha^{-1}(O_\alpha) : B \subset A \text{ endlich}\}$$

ist eine Basis von $\mathcal{O}$.

Beweis: Es ist $\mathcal{O}$ der Durchschnitt aller Topologien bzgl. derer alle f_α stetig sind.
Das Mengensystem $\mathcal{B}$ ist durchschnittsstabil. Sei $\hat{\mathcal{O}}$ die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie; d.h. $\hat{\mathcal{O}}$ besteht aus allen Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{B}$. Dann ist $\hat{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$.
Aus der Definition von $\hat{\mathcal{O}}$ folgt, dass alle f_α bzgl. $\hat{\mathcal{O}}$ stetig sind. Somit ist $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$. □

Die Konvergenz bzgl. der Initialtopologie läßt sich auf die Konvergenz der Bilder unter f_α zurückspielen.

Satz 5.5. Sei X eine Menge und seien $f_\alpha : X \to Y$ Abbildungen, wobei Y_α ein topologischer Raum ist ($\alpha \in A$). Betrachte die Intitialtopologie auf X. Dann gilt:

(a) Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X und sei $x \in X$. Es ist $\lim_I x_i = x$ genau dann, wenn $\lim_I f_\alpha(x_i) = f_\alpha(x)$ für alle $\alpha \in A$.

(b) Sei Z ein topologischer Raum und sei $g : Z \to X$ eine Abbildung. Genau dann ist g stetig, wenn $f_\alpha \circ g : Z \to Y_\alpha$ für jedes $\alpha \in A$ stetig ist.

Beweis: (a) "$\Rightarrow$" klar.
"$\Leftarrow$" Sei U eine Umgebung von x. Dann gibt es $B \subset A$ endlich, $O_\alpha \subset Y_\alpha$ offen derart, dass $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in B} f_\alpha^{-1}(O_\alpha) \subset U$. Insbesondere ist $f_\alpha(x) \in O_\alpha$ für $\alpha \in B$. Damit gibt es nach Voraussetzung i_α, sodass $f_\alpha(x_i) \in O_\alpha$ für alle $i \succeq i_\alpha$. Da I gerichtet ist, gibt es $i_0 \succeq i_\alpha$ für alle $\alpha \in B$. Dann ist $f_\alpha(x_i) \in O_\alpha$, also $x_i \in f_\alpha^{-1}(O_\alpha)$ für alle $i \succeq i_0$. Somit ist $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_0$.
(b) "$\Rightarrow$" Ist g stetig, so ist $f_\alpha \circ g$ stetig als Verknüpfung stetiger Abbildungen.
"$\Leftarrow$" Sei $\lim\limits_I z_i = z$ in Z. Aus der Voraussetzung folgt, dass $\lim\limits_I f_\alpha(g(z_i)) = f_\alpha(g(z))$ für alle $\alpha \in A$. Damit folgt aus (a), dass $\lim\limits_I g(z_i) = g(z)$. Wir haben gezeigt, dass g stetig ist. $\square$

Beispiel 5.6 (Topologie der punktweisen Konvergenz)**.** a) Sei Ω eine Menge und sei $\mathcal{F}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ eine Funktion}\}$. Zu $x \in \Omega$ betrachte die Abbildung $P_x : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathbb{R}$, die durch $P_x(f) = f(x) \quad (f \in \mathcal{F}(\Omega))$ definiert ist (die *Auswertungsabbildung* in x). Dann ist die Topologie der punktweisen Konvergenz aus Beispiel 3.5 gerade die Initialtopologie bzgl. der Familie $(P_x)_{x\in\Omega}$.
b) Natürlich kann man die Topolgie der punktweisen Konvergenz auch auf Teilmengen von $\mathcal{F}(\Omega)$ definieren. Konkrete Beispiele sind:

1. $X = C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$.
2. $X = C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.
3. $X = \mathcal{H}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$ mit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Definition 5.7 (Produkttopologie)**.** Seien $X_\alpha, \alpha \in A$, topologische Räume. Wir betrachten das kartesische Produkt $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ aller Familien $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ derart, dass $x_\alpha \in X_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Zu $\beta \in A$ heißt die Abbildung

$$P_\beta : X \to X_\beta, (x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto x_\beta$$

die *β-te Projektion*. Die *Produkttopologie* ist die gröbste Topologie auf X derart, dass alle Projektionen stetig sind.

Folgerungen: a) Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X mit $x_i = (x_{i\alpha})_{\alpha\in A}$ und $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$, so ist $\lim\limits_I x_i = x$ in X genau dann, wenn $\lim\limits_I x_{i\alpha} = x_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.
b) Eine Abbildung $g : Z \to X, Z$ ein topologischer Raum, ist genau dann stetig, wenn $p_\beta \circ g : Z \to X_\beta$ für alle $\beta \in A$ stetig ist.
c) Eine Basis der Topologie wird durch die Zylinder

$$O := \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\beta \in O_\beta \text{ für alle } \beta \in B\}$$

gebildet, wobei $B \subset A$ endlich ist und $O_\beta \subset X$ offen ist für alle $\beta \in B$.

Aufgabe 5.8. a) Sei $X_n = \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie und $X = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Hat X isolierte Punkte?

Ein Punkt z in einem topologischen Raum X heißt *isoliert*, falls $\{z\}$ eine Umgebung von z ist. Ein topologischer Raum heißt *perfekt*, wenn er keine isolierten Punkte besitzt.
b) Ist ein Unterraum eines perfekten topologischen Raumes (mit der Relativtopologie) wieder perfekt?

Aufgabe 5.9. Seien X_α Hausdorff-Räume mit mehr als einem Punkt, $X = \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ mit der Produkttopologie. Ist A überzählbar, so ist X nicht metrisierbar.

Satz 5.10. Sei (X, d) ein metrischer Raum $Y \subset X$.
a) Die Relativtopologie wird von der Metrik d, eingeschränkt auf Y, erzeugt.
b) Ist X separabel, so ist es auch Y.

Beweis: a) Sei $A \subset Y$ offen bzgl. d. Zu jedem $a \in A$ gibt es dann $\varepsilon_a > 0$ mit $B_Y(a, \varepsilon_a) := \{x \in A : d(x, a) < \varepsilon_a\} \subset A$. Sei $B_X(a, \varepsilon_a) := \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon_a\}$. Dann ist $O := \bigcup\limits_{z\in A} B_X(a, \varepsilon_a)$ in X offen und $A = O \cap Y$. Damit

ist A relativ offen. Sei umngekehrt A relativ offen, dann gibt es $O \subset X$ offen, sodass $A = O \cap Y$. Sei $a \in A$. Da O in X offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $B_X(a, \varepsilon) \subset O$. Damit ist $B_Y(x, \varepsilon) = B_X(x, \varepsilon) \cap Y \subset O \cap Y = A$. Also ist A bzgl. d in Y offen.
b) Sei $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X. Sei $I = \{(n, m) : B(a_n, \frac{1}{m}) \cap Y \neq \emptyset\}$. Wähle zu jedem $(n, m) \in I$ ein $y_{nm} \in B(a_n, \frac{1}{m}) \cap Y$. Sei $y \in Y, \varepsilon > 0$. Wähle $\frac{2}{m} < \varepsilon$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $d(a_n, y) < \frac{1}{m}$. Damit ist $(n, m) \in I$ und es ist $d(y, y_{n,m}) \leq d(y, a_n) + d(a_n, y_{nm}) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} < \varepsilon$. Zu jedem $y \in Y$ und jedem $\varepsilon > 0$ haben wir somit $(n, m) \in I$ gefunden derart, dass $y_{n,m} \in B(y, \varepsilon)$. Damit ist die abzählbare Menge $\{y_{n,m} : (n, m) \in I\}$ dicht in Y. $\square$

Wir zeigen an einem Beispiel, dass der obige Satz in beliebigen topologischen Räumen nicht richtig ist.

Beispiel 5.11. Es gibt einen separablen topologischen Hausdorffraum X und $Y \subset X$, so dass Y nicht bzgl. der Relativtopolgie separabel ist.

Beweis: Betrachte $\mathbb{R}_s$, die reelle Achse versehen mit der Sorgenfreytopologie. Eine Basis ist $\mathcal{B} = \{[a, b) : -\infty < a < b < \infty\}$. Somit ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}_s$. Es folgt, dass $\mathbb{R}_s$ und damit auch $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ separabel ist. Denn sei $(x, y) \in \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ und sei U eine Umgebung von (x, y). Dann gibt es $-\infty < a_j < b_j < \infty, j = 1, 2$, derart, dass $(x, y) \in [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \subset U$. Wähle $q_j \in [a_j, b_j) \cap \mathbb{Q}, j = 1, 2$. Dann ist $(q_1, q_2) \in U$. Wir haben gezeigt, dass $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ ist. Wähle $Y = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ versehen mit der Relativtopologie bzgl. $X = \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$. Dann ist Y nicht separabel. Zu $y \in \mathbb{R}$ ist nämlich

$$U = [y, y + 1) \times [-y, -y + 1)$$

eine offene Umgebung von $(y, -y)$ in X. Aber es ist $U \cap Y = \{(y, -y)\}$. Denn sei $(a, -a) \in U$. Dann ist $y \leq a \leq y + 1$ und $-y \leq -a \leq -y + 1$. Damit ist $y \leq a \leq y$. Der Raum Y trägt also die diskrete Topologie und ist überzählbar. Damit ist Y nicht separabel. $\square$

Soweit haben wir die Produkttopologie und die relative Topologie kennengelernt, um aus gegebenen Topologien neue zu konstuieren. Als letztes betrachten wir die Quotiententopologie.

Satz 5.12. Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $q : X \to Y$ surjektiv. Dann definiert

$$\mathcal{O} := \{O \subset Y : q^{-1}(O) \text{ offen}\}$$

eine Topologie auf Y. Es ist die feinste Topologie bzgl. der q stetig ist.

Aufgabe 5.13. a) Beweise Satz 5.12.
b) Sei in der Situation von Satz 5.12 $g : Y \to Z$ eine Abbildung mit Z einem topologischen Raum. Die Funktion g ist genau dann stetig, wenn $g \circ q : X \to Z$ stetig ist.

Beispiel 5.14. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Sei $q : X \to X/\sim$ die Quotientenabbildung. Dann ist $O \subset X/\sim$ offen genau dann, wenn $\bigcup\limits_{[x] \in O} [x]$ offen in X ist, wobei $q(x) =: [x]$.

Äquivalente Beschreibung: Sei X eine Menge und X^* eine Zerlegung von X (d.h. $X^* = \{A_i : i \in I\}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup\limits_{i \in I} A_i = X\}$. Definiere $q : X \to X^*, q(x) = A_i$ mit $x \in A_i$. Dann definiert man $O^* \subset X^*$ als offen, wenn $\bigcup\limits_{A \in O^*} A$ offen in X ist.

6 Kompakte Räume

In diesem Abschnitt ist X ein Hausdorff-Raum.

Definition 6.1. Eine Teilmenge K von X heißt *kompakt*, wenn Folgendes gilt: Sind $O_i, i \in I$, offene Teilmengen von X derart, dass

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i \ ,$$

so gibt es eine endliche Teilmenge von J von I derart, dass $K \subset \bigcup\limits_{i \in J} O_i$. Mit anderen Worten K heißt kompakt, wenn jede *offene Überdeckung* von K eine *endliche Teilüberdeckung* besitzt.

Beispiel 6.2. a) $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+2)$ ist nicht kompakt.
b) Sei $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Dann ist $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt.
c) $(0, 1]$ ist nicht kompakt.

Beweis: Übungsaufgabe.

Satz 6.3. Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis: Sei K kompakt und sei $x_0 \in X \setminus K$. Da X Hausdorffsch ist, gibt es zu jedem $y \in K$ offene Mengen U_y, O_y, sodass $U_y \cap O_y = \emptyset, x_0 \in U_y, y \in O_y$. Da K kompakt ist, gibt es $y_1 \dots y_n \in K$ so dass $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} O_{y_j}$. Die Menge $U := \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_{y_j}$ ist eine offene Umgebung von x_o. Da $U \cap O_{y_j} = \emptyset$ für alle $j = 1, \dots, n$, ist auch $U \cap K = \emptyset$. Zu jedem $x_o \in X \setminus K$ haben wir somit eine offene Umgebung U von x_o gefunden mit $U \subset X \setminus K$. Damit ist $X \setminus K$ offen und K abgeschlossen. $\square$

Wir haben sogar mehr bewiesen:

Lemma 6.4. *Sei $K \subset X$ kompakt und $x_o \in X \setminus K$. Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset X$ derart, dass $U \cap V = \emptyset, x_o \in U, K \subset V$.*

Das Lemma 6.4 sagt, dass wir kompakte Mengen und Punkte *durch offene Mengen trennen können.* Der nächste Satz zeigt, dass wir sogar disjunkte kompakte Mengen durch offene Mengen trennen können.

Satz 6.5. Man kann disjunkte kompakte Mengen in X durch offene Mengen trennen; d.h. sind $A, B \subset X$ kompakt mit $A \cap B = \emptyset$ gegeben, so findet man offene Mengen $U, V \subset X$ derart, dass $A \subset U, B \subset V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis: Nach Lemma 6.4 gibt es zu jedem $x \in A$ offene Mengen U_x, O_x gefunden mit $U_x \cap O_x = \emptyset$, $x \in U_x$, $B \subset O_x$. Da A kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_n \in A$ derart, dass $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j} =: U$. Die Menge $V := \bigcap_{j=1} O_{x_j}$ ist offen und $B \subset V$. Da $U_{x_j} \cap V \subset U_{x_j} \cap O_{x_j} = \emptyset$ für alle $j = 1, \ldots, n$, ist auch $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Nun zeigen wir noch eine Art Umkehrung von Satz 6.3.

Satz 6.6. Sei X kompakt. Eine Teilmenge K von X ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.

Beweis: Kompakte Teilmengen sind nach Satz 6.3 immer abgeschlossen. Sei umgekehrt X kompakt und $K \subset X$ abgeschlossen. Sei $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ mit $O_i \subset X$ offen. Da $X \setminus K$ offen ist, bildet $X = (X \setminus K) \cup \bigcup_{i \in I} O_i$ eine offene Überdeckung von X. Nach Voraussetzung gibt es $J \subset I$ endlich derart, dass $X \subset (X \setminus K) \cup \bigcup_{i \in J} O_i$. Damit ist $K \subset \bigcup_{i \in J} O_i$. $\square$

Bemerkung 6.7. Sei $K \subset X$. Man mache sich klar, dass es dasselbe ist zu sagen, dass K kompakt im Sinne von Definition 6.1 oder kompakt bzgl. der Relativtopologie ist.

Wir wollen nun die Aktion stetiger Abbildungen auf kompakten Mengen betrachten. Sei Y ein weiterer Hausdorffraum.

Satz 6.8. Sei $f : X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis: Sei $f(K) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ mit $O_i \subset Y$ offen, $i \in I$. Dann ist $K \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$. Da $f^{-1}(O_i)$ offen und K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge J von I, sodass $K \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$. Damit ist $f(K) \subset \bigcup_{i\in J} O_i$. $\square$

Korollar 6.9. Sei X kompakt, $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homömorphismus.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $f^{-1} : Y \to X$ stetig ist. Sei $O \subset X$ offen. Dann ist O^c abgeschlossen und somit kompakt. Damit ist $f(O^c)$ kompakt und damit abgeschlossen. Da $f(O)^c = f(O^c)$, folgt, dass $f(O)$ offen ist. Beachtet man, dass $f = (f^{-1})^{-1}$, so ist gezeigt worden, dass die Urbildmenge unter f^{-1} jeder offenen Menge offen ist. Das bedeutet, dass f^{-1} stetig ist. $\square$

Aus den Grundvorlesungen wissen wir, dass eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^d$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere besitz eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ein Minimum und ein Maximum. Aus Satz 6.8 schließen wir also:

Korollar 6.10 (Satz von Minimum und Maximum)**.** Sei $K \subset X$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_1, x_2 \in K$, sodass $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ für alle $x \in K$. Es ist also

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \min_{x\in K} f(x) \text{ und} \\ f(x_2) &= \max_{x\in K} f(x) \ . \end{aligned}$$

Beweis: $f(K)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$. $\square$

Dual kann man Kompaktheit folgendermaßen charakterisieren.

Aufgabe 6.11. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) X ist kompakt;

(ii) sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(X)$ eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X derart, dass $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$, wenn immer $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Dann ist $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$.

Daraus ergibt sich folgendes nützliche Korollar:

Korollar 6.12. Seien $K_n \subset X$ kompakt mit $\emptyset \neq K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset \ .$$

Nun wollen wir Kompaktheit mit Hilfe von Netzen beschreiben.

Definition 6.13. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* des Netzes $(x_i)_{i \in I}$ falls zu jeder Umgebung U von x und jedem $i \in I$ ein $j \succeq i$ existiert mit $x_j \in U$.

Satz 6.14. Sei $K \subset X$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) K ist kompakt;

(ii) jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in K hat einen Häufungspunkt in K.

Beweis: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz mit $x_i \in K$ für alle $i \in I$. Dann ist $K_i := \{x_j : j \succeq i\}^-$ kompakt. Da I gerichtet ist, haben endlich viele der Mengen K_i jeweils einen nicht-leeren Durchschnitt. Nach Aufgabe 6.11 gibt es damit $x \in \bigcap_{i \in I} K_i$. Ist U eine Umgebung von x und $i \in I$, so ist $U \cap \{x_j : j \succeq i\} \neq \emptyset$. Damit ist x ein Häufungspunkt des Netzes.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Seien $B_\alpha \subset K, \alpha \in A$, abgeschlossene Mengen derart, dass $\bigcap_{\alpha \in F} B_\alpha \neq \emptyset$, wenn $F \subset A$ endlich ist. Wir müssen zeigen, dass $\bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha \neq \emptyset$. Wähle $x_F \in \bigcap_{\alpha \in F} B_\alpha$ für jedes endliche $F \subset A$. Dann ist $(x_F)_{F \in \mathcal{F}}$ ein Netz in K, wenn $\mathcal{F} = \{F \subset A : F \text{ endlich}\}$ als gerichtete Menge bzgl. der

Mengeninklusion betrachtet wird. Nach Voraussetzung hat $(x_F)_{F\in\mathcal{F}}$ einen Häufungspunkt x in K. Dann ist $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} B_\alpha$; denn angenommen es gibt $\beta \in A$, sodass $x \notin B_\beta$. Dann ist $U := X \setminus B_\beta$ eine Umgebung von x. Somit gibt es eine endliche Teilmenge F von A derart, dass $\{\beta\} \subset F$ und $x_F \in U$. Damit ist $x_F \notin B_\beta$ im Widerspruch zur Definition von x_F. □

In einem kompakten Raum hängen Häufungspunkte und Grenzwerte folgendermaßen zusammen.

Satz 6.15. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in einer kompakten Teilmenge K von X und sei $x \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_I x_i = x$;

(ii) $(x_i)_{i\in I}$ hat x als einzigen Häufungspunkt.

Beweis: $(ii) \Rightarrow (i)$. Falls Aussage (i) nicht richtig ist, gibt es eine offene Umgebung U von x und zu jedem $i \in I$ ein $\varphi(i) \in I$ mit $\varphi(i) \succeq i$ und $x_{\varphi(i)} \notin U$. Das Netz $(x_{\varphi(i)})_{i\in I}$ hat dann einen Häufungspunkt $y \neq x$. Dieses y ist auch ein Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$. Denn sei U eine Umgebung von x. Sei $i_o \in I$ dann gibt es $i \succeq i_o$ mit $x_{\varphi(i)} \in U$. Aber $\varphi(i) \succeq i \succeq i_o$.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $y \neq x$. Dann gibt es $U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Es gibt $i_o \in I$, sodass $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_o$. Damit ist $x_i \notin V$ für alle $i \succeq i_o$. Also ist y kein Häufungspunkt des Netzes. □

Definition 6.16 (Teilnetz)**.** Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz. Sei $(J, \preceq)$ gerichtet, $\varphi : J \to I$ *kofinal in* I, d.h. $\forall i_o \in I\, \exists\, j_o \in J$, so dass $\varphi(j) \succeq i_o \forall j \succeq j_0$. Dann heißt $(x_{\varphi(j)})_{j\in J}$ ein *Teilnetz* von $(x_i)_{i\in I}$.

Satz 6.17. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X, und sei $x \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) x ist ein Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$;

(ii) $\exists$ Teilnetz $(x_{\varphi(j)})_{j\in J}$ von $(x_i)_{i\in I}$, das gegen x konvergiert.

Beweis: $(ii) \Rightarrow (i)$ Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Sei $i_o \in I$ beliebig. Da $\lim_J x_{\varphi(j)} = x$ gibt es $j_o \in J$, sodass $x_{\varphi(j)} \in U$ für alle $j \succeq j_o$. Dann gibt es $j_1 \in J$, sodass $\varphi(j) \succeq i_o$, wenn $j \succeq j_1$. Es gibt in $j_2 \in J$ derart, dass $x_{\varphi(j)} \in U$ für alle $j \succeq j_2$. Da J gerichtet ist, gibt es $j_3 \in J$ mit $j_3 \succeq j_1$ und $j_3 \succeq j_2$. Damit ist $i := \varphi(j_3) \succeq i_o$ und $x_i \in U$.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Sei x ein Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$. Zu $U \in \mathcal{U}(x), i \in I$ gibt es $\varphi(i,U) \in I$ mit $\varphi(i,U) \succeq i$ und $x_{\varphi(i,U)} \in U$. Die Menge $J := I \times \mathcal{U}(x)$ ist gerichtet bzgl. $(i,U) \succeq (j,V) :\Leftrightarrow (i \succeq j$ und $U \subset V)$. Es ist $(x_{\varphi(i,U)})_{(i,U)\in J}$ ein Teilnetz von $(x_i)_{i\in I}$. Ferner ist $\lim_I x_{\varphi(i,U)} = x$. Denn sei $U_o \in \mathcal{U}(x)$. Sei $i_o \in I$ beliebig. Für $(i,U) \succeq (i_o, U_o)$ gilt $i \succeq i_o$ und $U \subset U_o$. Damit ist $x_{\varphi(i,U)} \in U \subset U_o$. $\square$

Nun können wir die Kompaktheit auch folgendermaßen fassen, indem wir Satz **??** und Satz **??** miteinander verbinden.

Satz 6.18. Sei $K \subset X$. Äquivalent sind:

(i) K ist kompakt;

(ii) jedes Netz in K hat ein Teilnetz, das in K konvergiert.

Wir geben zusätzliche Informationen.

Definition 6.19. Sei $K \subset X$.
a) K heißt *abzählbar-kompakt*, wenn jede abzählbare offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
b) K heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

Satz 6.20. K ist genau dann abzählbar-kompakt, wenn jede Folge in K einen Häufungspunkt in K besitzt.

Beweis: Sei $K \subset X$ abzählbar-kompakt, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge. $S_n := \{x_m : m \geq n\}, A_n = \bar{S}_n, U_n := X \setminus A_n$. Hat die Folge keinen Häufungspunkt in K, so gilt $K \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Damit ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \supset K$. Somit gibt es $n_o \in \mathbb{N}$ endlich, sodass $K \subset \bigcup_{n=1}^{n_o} U_n$. Damit ist $K \cap A_{n_o} = K \cap \bigcap_{n=1}^{n_o} A_n = \emptyset$, ein offensichtlicher Widerspruch, da $x_{n_o} \in A_{n_o} \cap K$. Sei umgekehrt U_i offen, $K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, sodass es keine endliche Teilüberdeckung von K gibt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Sei $x \in K$ beliebig. Dann gibt es $i_o \in \mathbb{N}$, sodass $x \in U_{i_o}$. Da $x_n \notin U_{i_o}$ für alle $n \geq i_o$, ist x kein Häufungspunkt der Folge. $\square$

Satz 6.21. Es gelten folgende offensichtliche Beziehungen zwischen den drei Begriffen kompakt, folgenkompakt und abzählbar kompakt:
kompakt $\Rightarrow$ abzählbar kompakt;
folgenkompakt $\Rightarrow$ abzählbar kompakt.
Alle anderen vier Beziehungen sind im Allgemeinen falsch.

7 Kompakte metrische Räume

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

Definition 7.1. a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt *Cauchyfolge* falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_o \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_o$.
b) Der Raum M heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in M konvergiert.

Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man, dass jede konvergente Folge in M eine Cauchyfolge ist. Der Begriff der Vollständigkeit ist kein topologischer Begriff, denn er bleibt nicht unter Homöomorphie erhalten:

Beispiel 7.2. Die Abbildung $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist ein Homöomorphismus; aber $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist nicht vollständig, obwohl $\mathbb{R}$ es ist.

Aufgabe 7.3. Sei M vollständig. Eine Teilmenge A von M ist genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.

Lemma 7.4. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und sei $x \in M$. Ein Element x von M ist genau dann ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen x konvergiert.*

Beweis. Ist x ein Häufungspunkt so gibt es $x_{n_1} \in B(x, 1)$. Man findet $n_2 > n_1$ derart, dass $x_{n_2} \in B(x, \frac{1}{2})$. Fährt man so fort, so erhält man $x_k < x_{k+1}$ derart, dass $x_{n_k} \in B(x, \frac{1}{k})$. Somit ist $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Die Umkehrung folgt aus Satz 6.17, ist aber auch unmittelbar klar: Sei $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es k_o, sodass $x_{n_k} \in U$ für alle $k \geq k_o$. Ist $m \in \mathbb{N}$ beliebig, so gibt es $k \geq k_o$, sodass $n_k \geq m$ und somit $x_{n_k} \in U$. $\square$

Lemma 7.5. *Eine Cauchyfolge konvergiert genau dann, wenn sie einen Häufungspunkt besitzt.*

Beweis. Sei x ein Häufungspunkt der Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_o \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq n_o$. Es gibt $n_1 \geq n_o$, sodass $x_{n_1} \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$, also $d(x_{n_1}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ist für $n \geq n_1, d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x) \leq \varepsilon$. $\square$

Definition 7.6. Eine Teilmenge K von M heißt *präkompakt*, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $x_1, \dots, x_m \in K$, sodass $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon)$.

Nun kann man kompakte Mengen in M folgendermaßen charakterisieren.

Theorem 7.7. *Für eine Teilmenge K von M sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) K ist vollständig und präkompakt;

(ii) K ist kompakt;

(iii) K ist abzählbar kompakt;

(iv) jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge;

(v) jede Folge in K hat einen Häufungspunkt in K.

Beweis. Wir können annehmen, dass $K = M$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ a) Angenommen M ist nicht präkompakt. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, sodass M nicht durch endlich viele Kugeln vom Radius ε überdeckt werden kann. Damit findet man induktiv $y_k \in M, k \in \mathbb{N}$, sodass $y_{k+1} \notin \bigcup_{\ell=1}^{k} B(y_\ell, \varepsilon)$. Nach Voraussetzung hat $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $y \in M$. Damit gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y_n \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Ferner gibt es $m > n$ mit $y_m \in B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Damit ist $d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y) + d(y, y_m) < \varepsilon$, ein Widerspruch zur Wahl der y_n.
b) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Nach Voraussetzung besitzt sie einen Häufungspunkt y. Lemma 7.5 zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.
$(i) \Rightarrow (v)$ Sei M vollständig und präkompakt. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Da M präkompakt ist, gilt folgendes. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in M$, sodass unendlich viele x_n in $B(y, \varepsilon)$ liegen (denn M wird von endlich vielen ε-Kugeln überdeckt; in einer von ihnen müssen unendlich viele Folgenglieder liegen). Damit finden wir sukzessive $y_p \in M$, $J_p \subset \mathbb{N}$ unendlich mit $J_{p+1} \subset J_p$, sodass $x_n \in B(y_p, \frac{1}{p})$ für alle $n \in J_p$. Sei $\varphi(p)$ das p-te Element von J_p. Dann

ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend mit $\varphi(m) \in J_p$ für alle $m \geq p$. Für $n, m \geq p$ gilt

$$d(x_{\varphi(m)}, x_{\varphi(n)}) \leq d(x_{\varphi(m)}, y_p) + d(y_p, x_{\varphi(n)}) \leq \frac{2}{p} \ .$$

Somit ist $(x_{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Sie konvergiert nach Voraussetzung.
$(v) \Rightarrow (iv)$ Das folgt aus Lemma 7.4.
$(iv) \Rightarrow (ii)$ Sei $M = \bigcup\limits_{i \in I} O_i$ mit O_i offen.
a) Wir zeigen zunächst, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in M$ ein $i \in I$ existiert, sodass $B(x, \varepsilon) \subset O_i$. Andernfalls finden wir nämlich $x_n \in M$, sodass $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$ für alle $i \in I$. Sei x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gibt es $i_o \in I$, sodass $x \in O_{i_o}$. Da O_{i_o} offen ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $B(x, \frac{2}{n}) \subset O_{i_o}$. Wähle $m > n$, sodass $x_m \in B(x, \frac{1}{n})$. Dann ist $B(x_m, \frac{1}{m}) \subset B(x_m, \frac{1}{n}) \subset B(x, \frac{2}{n}) \subset O_{i_o}$, ein Widerspruch.
d) Wir wissen von der Implikation $(iv) \Rightarrow (i)$, die wir schon gezeigt haben, dass M präkompakt ist. Zu dem $\varepsilon > 0$ aus a) finden wir somit $y_1, \ldots, y_m \in M$, sodass $M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$. Zu jedem $j \in \{1, \ldots, m\}$ gibt es nach a) ein $i(j) \in I$, sodass $B(y_j, \varepsilon) \subset O_i$. Damit ist $M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} O_{i(j)}$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Das ist trivial.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Das ist Satz 6.20. Damit ist die Äquivalenz von (i)-(v) bewiesen.
□

Bemerkung 7.8. Eine Menge $K \subset M$ ist genau dann präkompakt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $\{y_1, \ldots, y_m\}$ von M gibt, sodass $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$. Gilt nämlich diese Bedingung (bei der wir nicht verlangen, dass $y_j \in K$!), so können wir annehmen, dass $K \cap B(y_j, \varepsilon) \neq \emptyset$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ (die Indizes lassen wir sonst einfach weg). Dann können wir $x_j \in K \cap B(y_j, \varepsilon)$ wählen. Folglich ist $B(y_j, \varepsilon) \subset B(x_j, 2\varepsilon)$ nach der Dreiecksungleichung. Somit ist $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(x_j, 2\varepsilon)$.

Satz 7.9. Jeder kompakte metrische Raum ist separabel.

Beweis. Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es $a_n^m, m = 1, \dots, N_n$, sodass $M \subset \bigcup_{m=1}^{N_m} B(a_n^m, \frac{1}{n})$. Die Menge

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n^m : m = 1, \dots, N_n\}$$

ist abzählbar. Sie ist dicht in A. Denn sei $x \in M, \varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Es gibt $m \in \{1, \dots, N_n\}$, sodass $x \in B(a_n^m, \frac{1}{n})$. Folglich ist $a_n^m \in B(x, \varepsilon)$ und insbesondere ist $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, was zu beweisen war. $\square$

8 Der Satz von Baire

Dieser Abschnitt ist in drei Teile eingeteilt: Ein Spiel, der Satz von Baire und eine kleine Auswahl seiner erstaunlichen Konsequenzen.

Teil A. Das Spiel von Choquet. Sei X ein topologischer Raum. Anton und Berta spielen mit nicht-leeren offenen Mengen. Sie agieren abwechselnd, Anton fängt immer an. Er wählt eine nicht-leere offene Teilmenge U_1 von X. Dann wählt Berta eine nicht-leere offene Teilmenge $V_1 \subset U_1$. Anton wählt $U_2 \subset V_1$ nicht-leer und offen, Berta wählt $V_2 \subset U_2$ nicht-leer und offen usw. Sie spielen unermüdlich weiter und bilden dann

$$U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n \ .$$

Definition. Anton *gewinnt*, wenn $U = \emptyset$. Berta gewinnt wenn $U \neq \emptyset$.

Nun definieren wir noch was eine Gewinnstrategie ist.

Definition. Wir sagen, dass Anton eine *Gewinnstrategie* besitzt, wenn bei beliebiger Wahl der V_n von Berta, Anton die Mengen U_n so wählen kann, dass $U = \emptyset$. Völlig analog definieren wir, wann Berta eine Gewinnstrategie hat. Man beachte, dass Anton immer beginnt.

Nun betrachten wir drei Eigenschaften des topologischen Raumes und zeigen, dass sie Gewinnstrategien implizieren. Die erste liefert so eine Strategie für Anton.

Satz 8.1. Es gebe abgeschlossene Mengen F_n in X mit $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$, sodass jedoch $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^\circ \neq \emptyset$. Dann hat Anton eine Gewinnstrategie.

Beweis. Anton beginnt das Spiel und wählt $U_1 := (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^\circ$. Nach jeder Wahl $V_n \subset U_n$ von Berta wählt Anton $U_{n+1} := V_n \setminus F_n$. Dann ist $U_{n+1} \neq \emptyset$. Denn sonst wäre $\emptyset \neq V_n \subset F_n$. Es ist $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_1 \setminus F_n) = U_1 \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c) =$

$U_1 \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^c = \emptyset$. $\square$

Die folgenden beiden Eigenschaften liefern Gewinnstrategien für Berta.

Satz 8.2. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann hat Berta eine Gewinnstrategie.

Zum Beweis benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\emptyset \neq F_n \subset X$ abgeschlossen mit $F_{n+1} \subset F_n$, sodass $d(F_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Hier ist $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ der *Durchmesser* einer Menge $A \subset X$.

Beweis. Wähle $x_n \in F_n$. Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $p \in \mathbb{N}$ mit $d(F_p) < \varepsilon$. Seien $n, m \geq p$. Dann ist $x_n \in F_n \subset F_p$ und $x_m \in F_m \subset F_p$, somit $d(x_n, x_m) \leq d(F_p) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq p$. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Da $x_n \in F_m$ für alle $n \geq m$ und da F_m abgeschlossen ist, ist $x \in F_m$. Da m beliebig ist, gilt $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$. $\square$

Beweis von Satz 8.2. Hat Anton U_1 gewählt, so wählt Berta $V_1 := B(x_1, r_1)$ mit $\bar{B}(x_1, r_1) \subset U_1, r_1 > 0$. Hat Anton $U_2 \subset V_1$ gewählt, so nimmt Berta $V_2 = B(x_2, r_2)$ mit $\bar{B}(x_2, r_2) \subset U_2, 0 < r_2 \leq \frac{r_1}{2}$. Sukzessive führt das zu $V_n = B(x_n, r_n)$ mit $\bar{B}(x_n, r_n) \subset U_n \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}), r_n \leq \frac{r_{n-1}}{n}$. Somit ist

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$$

nach dem vorausgehenen Lemma. $\square$

Definition. Ein topologischer Raum X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt x in X eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. Damit gibt es für jedes $x \in X$ und zu jeder Umgebung U von x eine kompakte

Menge K mit
$$x \in \overset{\circ}{K} \subset K \subset U \ .$$

Satz 8.3. Ist X lokal kompakt, so besitzt Berta eine Gewinnstrategie.

Beweis. Hat Anton U_1 gewählt, so findet Berta eine kompakte Menge $K_1 \subset U_1$ mit $\overset{\circ}{K_1} \neq \emptyset$ und wählt $V_1 = \overset{\circ}{K_1}$. Wählt Anton $U_2 \subset \overset{\circ}{K_1}$, so nimmt Berta $V_2 = \overset{\circ}{K_2}$ wobei $K_2 \subset U_2$ kompakt mit nicht-leerem Inneren ist. Fahren unsere beiden Spieler so fort, so erhält man kompakte Mengen $K_{n+1} \subset \overset{\circ}{K_n}$ mit $U_n = \overset{\circ}{K_n}$. Somit ist $U = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n \supset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_{n+1} \neq \emptyset$ nach Korollar 6.12. □

Teil B. Der Satz von Baire.

Definition. Ein topologischer Raum X ist ein *Baireraum*, wenn folgendes gilt:

Ist $F_n \subset X$ abgeschlossen mit leerem Inneren, dann hat auch $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ leeres Inneres.

Damit ist X genau dann ein Baireraum, wenn die Voraussetzung von Satz 8.1 nicht erfüllt ist. Satz 8.1 erlaubt also eine neue Formulierung.

Bemerkung: Hat Berta *eine Gewinnstrategie*, so ist X ein Baireraum.
Denn wenn Berta eine Gewinnstrategie hat, dann hat Anton keine Gewinnstrategie. □

Aus Satz 8.2, Satz 8.3 folgt nun unmittelbar der folgende wichtige Satz:

Satz 8.4 (Baire)**.** Jeder vollständige metrische Raum und jeder lokal kompakte Raum ist ein Baireraum.

Wir wollen einige Eigenschaften zusammenstellen deren Beweise wir als Übungsaufgaben stellen.

Satz 8.5. Sei X ein Baireraum. Dann gelten folgende Eigenschaften:
a) Seien $F_n \subset X$ abgeschlossen, sodass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Dann gibt ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\overset{\circ}{F_m} \neq \emptyset$.
b) Sei $O_n \subset X$ offen und dicht wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ offen und dicht.

Satz 8.6. Sei X ein Baireraum, $Y \subset X$. Ist Y offen oder abgeschlossen, so ist auch Y ein Baireraum (bzgl. der Relativtopologie).

Teil C. Anwendungen.

Satz 8.7. $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis. Angenommen, $\mathbb{R} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wähle $F_n = \{a_n\}$. Nach Satz 8.5 gibt es $m \in \mathbb{N}$, sodass $\overset{\circ}{F_m} \neq \emptyset$ ein Widerspruch. $\square$

Ein Element $x \in X$ heißt *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist. Wie oben ergibt sich:

Satz 8.8. Ein abzählbarer Baireraum hat isolierte Punkte.

Seien $-\infty < a < b < \infty$. Wir betrachten den Vektorraum

$$C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\} .$$

Dann definiert

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

eine Norm auf $C[a,b]$ bzgl. der $C[a,b]$ vollständig ist (siehe spätere Kapitel). Die Norm induziert die *gleichmäßige Konvergenz*, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ bzgl. } \| \ \|_\infty \Leftrightarrow f_n \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f \ .$$

Wir erwähnen den folgenden Satz, den wir eventuell später beweisen werden.

Satz 8.9 (Weierstraß)**.** Die Polynome sind dicht in $C[a,b]$.

Wir werden den Satz von Baire auf $C[a,b]$ anwenden, um folgendes Resultat zu beweisen.

Satz 8.10. Es gibt eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die in keinem $t \in [0,1)$ differenzierbar ist.

Beweis. Sei $X = C[0,2]$. Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir

$$E_n := \{f \in X : \sup_{0<h\leq 1} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{h} > n \text{ für alle } t \in [0,1]\} .$$

Wir zeigen, dass E_n offen und dicht in X ist. Damit ist nach dem Satz von Baire

$$E := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

dicht in X. Sei $f \in E$. Dann ist $\sup\limits_{0<h\leq 1} \frac{|f(t+h)-f(t)|}{h} = \infty$ für alle $t \in [0,1]$. Damit ist f in keinem Punkt von $[0,1)$ rechtsseitig differenzierbar. Mehr noch: Funktionen mit dieser Eigenschaft sind dicht in $C[0,2]$.
Nun zum Beweis von Offen- und Dichtheit.
a) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Die Menge E_n ist offen. Sei nämlich $f \in E_n$. Zu jedem $t \in [0,1]$ gibt es $\delta_t > 0, 0 < h_t < 1$, sodass

$$\frac{|f(t+h_t) - f(t)|}{h_t} > n + \delta_t \ .$$

Da f stetig ist gibt es eine offene Umgebung von t, U_t offen, sodass

$$\frac{|f(s+h_t) - f(s)|}{h_t} > n + \delta_t$$

für alle $s \in U_t$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$, sodass $[0,1] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_{t_j}$. Wähle,

$$\begin{aligned} \delta &:= \min\{\delta_{t_j}, \ldots, \delta_{t_m}\} \ , \\ h &:= \min\{h_{t_j} : j = 1, \ldots, m\} \ . \end{aligned}$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}h\delta$ und sei $g \in X$ mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Wir zeigen, dass $g \in E_n$. Sei $t \in [0,1]$. Es gibt $j \in \{1, \ldots, m\}$, sodass $t \in U_{t_j}$. Damit ist

$$\frac{|g(t + h_{t_j}) - g(t)|}{h_{t_j}} \geq \frac{|f(t + h_{t_j}) - f(t)|}{h_{t_j}} - \frac{2\|f - g\|_\infty}{h_{t_j}} > n + \delta - \frac{2\varepsilon}{h} > n \ .$$

b) Wir zeigen, dass E_n dicht ist. Sei $O \subset X$ offen. Wir müssen zeigen, dass $E_n \cap O \neq \emptyset$. Nach dem Satz von Weierstraß gibt es ein Polynom p und $\varepsilon > 0$, sodass $B(p, 2\varepsilon) \subset O$. Wähle $m > n + \|p'\|_\infty$. Sei g_m eine Zickzack-Funktion, sodass $0 \geq g_m(t) \geq \varepsilon$ und $|g'(t\pm)| \leq m$ für alle $t \in [0,1]$, wobei $g'(t\pm)$ die rechts und linksseitige Ableitungen von g in t bezeichnet.

ε

0

1

Dann ist $f := g_m + p \in B(p, 2\varepsilon) \subset O$ und $f \in E_n$, da für alle $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_m(t+h) - f_m(t)}{h} \right| &\geq \left| \frac{g_m(t+h) - g_m(t)}{h} \right| - \frac{p(t+h) - p(t)}{h} \\ &\geq m - \|p'\|_\infty > n \ . \end{aligned}$$

$\square$

9 Der $C(K)$, der Banachsche Fixpunktsatz und Differenzialgleichung

In diesem Kapitel betrachten wir einen wichtigen vollständigen metrischen Raum und zeigen einige Anwendungen.

Sei K ein kompakter topologischer Raum und (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten den Raum

$$C(K, Y) := \{f : K \to Y : f \text{ ist stetig}\} .$$

Satz 9.1. Durch

$$d(f, g) := \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

wird eine Metrik auf $C(K, Y)$ definiert bzgl. der $C(K, Y)$ vollständig ist.

Beweis. a) Zunächst einmal zeigen wir, dass $d(f, g) < \infty$. Seien $f, g \in C(K, Y)$. Dann ist $p(x) := d(f(x), g(x))$ eine stetige Funktion von K nach $\mathbb{R}_+$. Dazu betrachten wir auf $Y \times Y$ die Metrik

$$d_1((y_1, y_2), (z_1, z_2)) = d(y_1, z_1) + d(y_1, y_2) .$$

Sie induziert die komponentenweise Konvergenz. Damit ist die Abbildung

$$Y \times Y \to \mathbb{R} \quad (y_1, y_2) \mapsto d(y_1, y_2)$$

stetig. Ferner ist $h : K \to Y \times Y, h(x) = (f(x), g(x))$ stetig. Damit ist p als Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen stetig. Da K kompakt ist, ist p beschränkt (und hat sogar ein Maximum). Folglich ist $d(f, g) < \infty$. Nun sieht man leicht, dass d eine Metrik auf $C(K, Y)$ definiert.
b) Wir zeigen, dass der Raum vollständig ist. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C(K, Y)$. Sei $x \in K$. Dann ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Also existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in Y. Es bleiben zwei Dinge zu zeigen:
c) f ist stetig und
d) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Sei $x_o \in K$. Wir zeigen, dass f stetig in x_o ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_o \in \mathbb{N}$, sodass $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon/3$ für alle $n, m \geq n_o$ und alle $x \in K$. Damit gilt

$$d(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon/3$$

für alle $x \in K$ und alle $n \geq n_o$. Da f_{n_o} stetig in x_o ist, gibt es eine Umgebung U von x_o derart, dass

$$d(f_{n_o}(x), f_{n_o}(x_o)) \leq \varepsilon/3 \text{ für alle } \ x \in U \ .$$

Damit ist für $x \in U$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_o)) &\leq d(f(x), f_{n_o}(x)) + d(f_{n_o}(x), f_{n_o}(x_o) + d(f_{n_o}(x_o), f(x_0)) \\ &\leq \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass f stetig ist. Da wir oben zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_o \in \mathbb{N}$ gefunden haben, sodass

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in K} d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/3 \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_o$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ im Sinne der Metrik auf $C(K, Y)$. $\square$

In dem Beweis haben wir gezeigt, dass der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen stetig ist.

Korollar 9.2. a) Der Raum $C(K) := \{f : K \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$ ist ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|f\|_{C(K)} : \sup_{x\in K} |f(x)| \ .$$

b) Sei E ein Banachraum. Dann ist $C(K, E)$ ein Banachraum bzgl. der Norm

$$\|f\|_{C(K,E)} := \sup_{x\in K} \|f(x)\|_E \ .$$

Wir erinnern daran, dass ein Banachraum ein vollständiger normierter Raum ist. Die Addition und Skalarmultiplikation in $C(K,E)$ sind punktweise definiert, d.h.

$$(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x) \quad (x \in K)$$

für alle $f, g \in C(K,E), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Einer der wichtigsten Gründe für den Erfolg des Konzepts eines vollständigen metrischen Raumes ist die Gültigkeit des Banachschen Fixpunktsatzes. Er ist einer der wenigen fundamentalen Argumente, die wir besitzen, um Gleichungen zu lösen.

Satz 9.3 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $S : M \to M$ eine *strikte Kontraktion*, d.h. es gibt $0 \leq q < 1$ derart, dass

$$d(Sx, Sy) \leq q(d(x,y)$$

für alle $x, y \in M$. Dann besitzt S einen eindeutigen Fixpunkt.

Ferner gilt folgendes: Sei $x_o \in M$ beliebig. Definiere x_n induktiv durch $x_{n+1} = Sx_n, n = 0, 1, 2 \ldots$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Anmerkung: Wir setzen hier einfach $Sx := S(x)$ und sparen uns die Klammern. Ferner setzen wir $S^\circ x := x, S^1 := S$ und $S^n = So \ldots oS$ (n-mal). Damit ist also $x_n = S^n x$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} d(S^{n+1}x_o, S^n x_o) &\leq qd(S^n x_o, S^{n-1}x_o) \\ &\leq q^2 d(S^{n-1}x_o, S^{n-2}x_o) \\ &\vdots \\ &\leq q^n d(Sx_o, x_o) \ . \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_o \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{q^{n_o}}{1-q} \leq \varepsilon$. Dann gilt für $n_o \leq n, p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
d(S^{n+p}x_o, S^n x_o) &\leq d(S^{n+p}x_0, S^{n+p-1}x_o) + \ldots + d(S^{n+1}x_o, S^n x_o) \\
&\leq (q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \ldots + q^n) d(Sx_o, x_o) \\
&\leq \frac{q^n}{1-q} d(Sx_o, x_o) \\
&\leq \varepsilon d(Sx_o, x_o) \ .
\end{aligned}$$

Damit ist $(S^n x_o)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Sei $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} S^n x_o$. Dann ist $Sx^* = \lim\limits_{n\to\infty} S^{n+1}x_o = x^*$. Wir haben gezeigt, dass S einen Fixpunkt x^* besitzt. Ist x^{**} ein weiterer Fixpunkt, so ist

$$\begin{aligned}
d(x^*, x^{**}) &= d(Sx^*, Sx^{**}) \\
&\leq q d(x^*, x^{**}) \ .
\end{aligned}$$

Da $q < 1$ folgt, dass $d(x^*, x^{**}) = 0$, also $x^* = x^{**}$. □

Man kann den Satz 9.3 leicht etwas verallgemeinern.

Korollar 9.4 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $S : M \to M$ eine Abbildung. Es gebe $m \in \mathbb{N}$ derart, dass S^m eine strikte Kontraktion ist. Dann hat S einen eindeutigen Fixpunkt.

Beweis. a) Es gibt genau ein $x^* \in M$, sodass $S^m x^* = x^*$. Ferner ist $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} S^{mn} x_o$, wobei $x_o \in M$ beliebig gewählt werden kann. Also ist $Sx^* = \lim\limits_{n\to\infty} S^{mn} S x_o = x^*$, da wir ja auch Sx_o als Startwert wählen dürfen.
b) Ist $Sx^* = x^*$, so gilt auch $S^m x^* = x^*$. Da S^m nur einen Fixpunkt besitzt, kann auch S nur einen Fixpunkt besitzen. □

Als Anwendung zeigen wir, dass Anfangswertprobleme eine eindeutige globale Lösung haben, wenn sie durch eine Lipschitz-stetige Funktion definiert sind. Sei $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig, wobei $T > 0$. Es gebe $L \geq 0$ mit

$$\|f(t, y) - f(t, z)\|_\infty \leq L \|y - z\|_\infty$$

für alle $y, z \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T]$. Hier ist $\|y\|_\infty = \max\limits_{j=1\ldots d} |y_j|$.

Satz 9.5 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)**.** Sei $u_o \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Es gibt genau eine stetig differenzierbare Funktion $u : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, die das Problem

$$(AWP) \begin{cases} u'(t) &= f(t, u(t)) \ , \ t \in [0,T] \ ; \\ u(0) &= u_o \end{cases}$$

löst.

Beweis. Der Raum $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ ist ein Banachraum. Definiere

$$S : C([0,T];\mathbb{R}^d) \to C([0,T];\mathbb{R}^d)$$

durch

$$(Su)(t) = u_o + \int\limits_o^t f(s, u(s))\,\mathrm{ds} \ .$$

Eine Funktion $u \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ ist genau dann eine Lösung von (AWP), wenn $Su = u$. Wir zeigen, dass für $t \in [0,T], n \in \mathbb{N}_o, u, v \in C([0,T], \mathbb{R}^d)$

$$\|S^n u(t) - S^n v(t)\|_\infty \leq \frac{L^n}{n!} t^n \|u - v\| \tag{9.1}$$

gilt, wobei $\|u\| = \|u\|_{C([0,T],\mathbb{R}^d)}$. Für $n = 0$ ist das trivial. Nehmen wir an, die Abschätzung gilt für ein $n \in \mathbb{N}_o$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\|S^{n+1}u(t) - S^{n+1}v(t)\|_\infty = \\ &\| \int\limits_o^t f(s, (S^n u)(s)) - f(s, (S^n v)(s)\,\mathrm{ds}\, \| \\ &\leq L \int\limits_o^t \|(S^n u)(s) - (S^n v)(s)\|_\infty\,\mathrm{ds} \\ &\leq L \int\limits_o^t \tfrac{L^n}{n!} s^n\,\mathrm{ds} \cdot \|u - v\| \\ &= \tfrac{L^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} \cdot \|u - v\| \ . \end{aligned}$$

Dabei haben wir bei der vorletzten Ungleichung die Induktionsvoraussetzung benutzt. Aus (9.1) folgt, dass

$$\|S^n u - S^n v\| \leq \frac{L^n T^n}{n!} \|u - v\| \ .$$

Damit ist S^n eine strikte Kontraktion, wenn n groß genug ist. □

Wir haben uns in diesem und vorangehenden Kapitel davon überzeugt, dass Vollständigkeit eine sehr nützliche Eigenschaft ist. Was kann man tun, wenn ein metrischer Raum nicht vollständig ist? Dann kann man eine eindeutige Vervollständigung definieren, also einen kleinsten vollständigen metrischen Raum, der den gegebenen Raum enthält. Das kann man so machen, wie man $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruiert: man betrachtet alle Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ und definiert eine geeignete Äquivalenzrelation. Der Quotientenraum ist dann $\mathbb{R}$. Wir wollen jedoch hier etwas elegantere Argumente geben. Zunächst betrachten wir einen weiteren Banachraum. Sei Ω eine beliebige Menge. Dann ist

$$\mathcal{F}^b(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \ \text{ ist beschränkt}\}$$

ein Vektorraum bzgl. den punktweise definierten Operationen

$$(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x) \quad (x \in \Omega)$$

für alle $f, g \in \mathcal{F}^b(\Omega), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Durch

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

wird auf $\mathcal{F}^b(\Omega)$ eine Norm definiert.

Satz 9.6. Der Raum $\mathcal{F}^b(\Omega)$ ist vollständig, also ein Banachraum.

Beweis. Übungsaufgabe, vgl. Satz 9.1 □

Aufgabe 9.7. Sei Ω ein topologischer Raum, $C^b(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : \text{beschränkt und stetig}\}$.
a) Zeige, dass $C^b(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{F}^b(\Omega)$ ist; d.h. der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig.
b) Sei K ein kompakter topologischer Raum. Zeige, dass $C(K) = C^b(K)$.

Nun kommen wir zur Vervollständigung eines metrischen Raumes.

Satz 9.8 (Vervollständigung)**.** Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen $(\tilde{M}, \tilde{d})$, sodass

(a) $M \subset \tilde{M}$,

(b) $\tilde{d}(x, y) = d(x, y) \quad (x, y \in M)$;

(c) M ist dicht in $\tilde{M}$.

Beweis. Wähle $x_o \in M$ beliebig. Für $a \in M$ definiere $\Phi_a : M \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_o) \ .$$

Dann ist Φ_a beschränkt, denn aus der Dreiecksungleichung

$$d(x, a) \leq d(x, x_o) + d(x_o, a)$$

folgt, dass $\Phi_a(x) \leq d(x_o, a)$. Ferner ist

$$\begin{aligned} -\Phi_a(x) &= -d(x, a) + d(x, x_o) \\ &\leq -d(x, a) + d(x, a) + d(a, x_o) \\ &= d(a, x_o) = d(x_o, a) \ . \end{aligned}$$

Somit ist $|\Phi_a(x)| \leq d(x_o, a)$ für alle $x \in M$. Es ist also $\Phi_a \in \mathcal{F}^b(M)$. Ferner ist für $a, b \in M$

$$\begin{aligned} |\Phi_a(x) - \Phi_b(x)| &= |d(x, a) - d(x, b)| \\ &\leq d(a, b) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |\Phi_a(a) - \Phi_b(a)| &= |-d(a, x_o) - d(b, a) + d(a, x_o)| \\ &= d(a, b) \ . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|\Phi_a - \Phi_b\|_\infty = d(a, b) \ .$$

Die Abbildung $\Phi : M \to \mathcal{F}^b(M)$ ist also isometrisch. Wir können also M mit $\Phi(M)$ identifizieren. Die Menge $\tilde{M} := \overline{\Phi(M)}$ ist vollständig als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $\mathcal{F}^b(M)$. □

Aufgabe 9.9 (Eindeutigkeit der Vervollständigung)**.** Sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ vollständige metrische Räume. Es gebe isometrische Abbildungen

$$\Phi_j : M \to M_j$$

(d.h. es gilt $d_j(\Phi_j(x), \Phi_j(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in M$), sodass

$$\Phi_j(M) \ \text{ dicht in } \ M_j \ \text{ liegt}$$

für $j = 1, 2$. Zeige: es gibt eine eindeutige isometrische bijektive Abbildung

$$\Phi : M_1 \to M_2$$

derart, dass $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$.

Wir wollen uns den Begriff der Präkompaktheit nochmals näher ansehen. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Wir erinnern daran, dass A präkompakt heißt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Mittelpunkte $a_1, \ldots, a_m \in A$ gibt, sodass

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(a_j, \varepsilon) \ .$$

Die Menge A ist kompakt genau dann, wenn sie vollständig und präkompakt ist. Insbesondere ist jede kompakte Teilmenge von M vollständig und somit abgeschlossen. Man sagt, dass A *relativ kompakt* ist, falls $\bar{A}$ kompakt ist.

In der folgenden Aufgabe werden die Beziehungen zwischen den verschiedenen Begriffen angegeben.

Aufgabe 9.10. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$.
a) Ist A relativ kompakt, so ist A präkompakt.
b) Ist M vollständig, so ist A genau dann präkompakt, wenn A relativ kompakt ist.
c) Sei $\tilde{M}$ die Vervollständigung von M. Die Menge A ist genau dann präkompakt, wenn A relativ kompakt in $\tilde{M}$ ist.

10 Filter, Ultrafilter und der Satz von Tychonov

Hauptgegenstand dieses Abschnitts ist der Satz von Tychonov. Er ist einfach zu formulieren: das Produkt kompakter Räume ist kompakt. Dennoch handelt es sich um ein tiefer liegendes Ergebnis. Wenn man jedoch geeignete Begriffe einführt (Ultrafilter, universelle Netze), so ist der Beweis am Ende nur wenige Zeilen lang. Sei X eine Menge.

Definition 10.1. 1. $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine *Filterbasis*, falls

a) $B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$ und

b) zu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gibt es $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

2. Ein *Filter* ist eine Filterbasis $\mathcal{B}$ derart, dass

c) $B \in \mathcal{B}, B \subset U \Rightarrow U \in \mathcal{B}$.

3. Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis, so heißt $\langle \mathcal{B} \rangle := \{U \subset X : \exists\, B \in \mathcal{B}, B \subset U\}$ *der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter*. Es ist der kleinste Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

Beispiel 10.2. a) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathcal{U}(x)$ ein Filter, der Umgebungsfilter von x.
b) Sei (M, d) ein metrischer Raum, $x \in M$. Dann ist $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Filterbasis und $\mathcal{U}(x) = \langle \mathcal{B} \rangle$.

Wir definieren nun, wann eine Filterbasis konvergiert.

Definition 10.3. Sei X ein Hausdorffraum, $\mathcal{B}$ eine Filterbasis, und sei $x \in X$. Wir sagen, dass $\mathcal{B}$ *gegen x konvergiert* und schreiben

$$\lim \mathcal{B} = x$$

falls $\mathcal{U}(x) \subset \langle \mathcal{B} \rangle$; d.h. also falls für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $B \subset U$. Man sieht leicht, dass der Grenzwert eine Filterbasis eindeutig ist (falls er existiert).

Beispiel 10.4. a) Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz, $x \in X, B_i = \{x_j : i \preceq j\}$. Dann ist $\mathcal{B} := \{B_i : i \in I\}$ eine Filterbasis. Es ist $\lim \mathcal{B} = x$ genau dann, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $i_o \in I$ existiert, sodass $B_{i_o} \subset U$; d.h. $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_o$. Somit gilt:

$$\lim \mathcal{B} = x \Leftrightarrow \lim_I x_i = x \ .$$

b) Umgekehrt können wir die Filterkonvergenz durch eine Netzkonvergenz folgendermaßen ausdrücken: Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis, $\lim \mathcal{B} = x$. Definiere

$$B \preceq B' :\Leftrightarrow B' \subset B \ .$$

Dadurch wird $\mathcal{B}$ induktiv geordnet. Wähle zu jedem $B \in \mathcal{B}$ ein $x_B \in B$. Dann gilt

$$\lim_{\mathcal{B}} x_B = x \ .$$

Das obige Beispiel zeigt, dass Konvergenz von Filterbasen und Konvergenz von Netzen zueinander äquivalent sind. Der Vorteil von Filtern liegt darin, dass feinere Filter leicht zu definieren sind. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei Filter, so heißt $\mathcal{F}$ *feiner* als $\mathcal{G}$ oder $\mathcal{G}$ *gröber* als $\mathcal{F}$ falls

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \ .$$

Definition 10.5. Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt <u>Ultrafilter</u> falls gilt: Ist $\mathcal{G}$ ein Filter mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, so ist $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Beispiel 10.6. Sei $a \in X$. Dann ist $\mathcal{F} := \{F \subset X : a \in F\}$ ein Ultrafilter.

Definition 10.7. Sei $(I, \preceq)$ eine geordnete Menge.
a) Die Menge I heißt *induktiv geordnet*, falls jede total geordnete Teilmenge J von I eine *obere Schranke* besitzt (d.h. es gibt $s \in I$, sodass $j \preceq s$ für alle $j \in J$).
b) Ein Element m von I heißt *maximal*, falls für jedes $i \in I$ aus $m \preceq i$ folgt, dass $m = i$.

Mit Hilfe dieser Definition können wir das Lemma von Zorn formulieren. Es ist zum Wohlordnungssatz und zum Auswahlaxiom äquivalent. Das Auswahlaxiom (und damit das Lemma von Zorn) wollen wir hier durchweg voraussetzen. In anderen Vorlesungen wird es ebenfalls benutzt: in der Maßtheorie, um die Existenz von nicht Lebesgue-messbaren Mengen zu zeigen, und in der Funktionalanalysis, um den Satz von Hahn-Banach zu beweisen.

Lemma 10.8 (Zorn)**.** *Jede induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.*

Mit Hilfe des Lemmas von Zorn 10.8 können wir viele Ultrafilter angeben.

Satz 10.9. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$.

Beweis. Die Menge

$$E := \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ ist ein Filter mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\} ,$$

ist bzgl. der Inklusion induktiv geordnet. Sei nämlich $C \subset E$ total geordnet. Dann ist $\mathcal{M} := \bigcup_{\mathcal{G} \in C} \mathcal{G}$ ein Filter. Ist nämlich $G_1, G_2 \in \mathcal{M}$, so gibt es $\mathcal{G}_1 \in C, \mathcal{G}_2 \in C$ mit $G_1 \in \mathcal{G}_1, G_2 \in \mathcal{G}_2$. Sei etwa $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Dann gibt es $G_3 \in \mathcal{G}_2$, sodass $G_3 \subset G_1 \cap G_2$. Folglich ist $G_3 \in \mathcal{M}$. Damit ist $\mathcal{M}$ eine Filterbasis. Ist $G \in \mathcal{M}$ und $G \subset A$, so ist $G \in \mathcal{G}$ und damit $A \in \mathcal{G}$ für ein $\mathcal{G} \in C$. Damit ist auch $A \in \mathcal{M}$.
Nach dem Lemma von Zorn hat E ein maximales Element $\mathcal{U}$. Nach Definition ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. □

Ultrafilter kann man folgendermaßen characterisieren.

Satz 10.10. Sei $\mathcal{U}$ ein Filter. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{U}$ ist ein Ultrafilter;

(ii) für jede Teilmenge A von X gilt $A \in \mathcal{U}$ oder $A^c \in \mathcal{U}$.

Hier ist $A^c = X \setminus A$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $A \subset X$. Es gelte $A^c \notin \mathcal{U}$. Damit ist $A \cap V \neq \emptyset$ für alle $V \in \mathcal{U}$ (denn sonst gäbe es $V \in \mathcal{U}$ mit $A \cap V = \emptyset$, und es wäre $V \subset A^c$ und damit $A^c \in \mathcal{U}$). Die Menge

$$\mathcal{B} := \{A \cap V : V \in \mathcal{U}\}$$

ist also eine Filterbasis, und es gilt $\mathcal{U} \subset \langle \mathcal{B} \rangle$. Da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, folgt dass $\mathcal{U} = \langle \mathcal{B} \rangle$. Es ist aber $A \in \langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{U}$. Damit ist (ii) bewiesen.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Es gelte (ii) für $\mathcal{U}$. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter mit $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}$. Sei $F \in \mathcal{F}$. Angenommen, $F \notin \mathcal{U}$. Dann ist nach Voraussetzung $F^c \in \mathcal{U} \subset \mathcal{F}$. Da aber auch $F \in \mathcal{F}$ und $F \cap F^c = \emptyset$ sind die Filteraxiome für $\mathcal{F}$ verletzt, ein Widerspruch. Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. □

Nun führen wir diejenigen Netze ein, die Ultrafiltern entsprechen.

Definition 10.11. Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ heißt *universell*, falls für jede Teilmenge A von X gilt:
entweder es gibt $i_o \in I$, sodass $x_i \in A$ für alle $i \succeq i_o$, oder es gibt $i_o \in I$, sodass $x_i \in A^c$ für alle $i \succeq i_o$.

Satz 10.12. Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz, $B_i := \{x_j : j \succeq i\}$ und $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\langle \mathcal{B} \rangle$ ist ein Ultrafilter;

(ii) das Netz $(x_i)_{i \in I}$ ist universell.

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Satz 10.13. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Zu $U \in \mathcal{U}$ wähle $x_U \in U$. Dann ist das Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{U}}$ universell.

Beweis. Sei $A \subset X$. Dann ist $A \in \mathcal{U}$ und somit $x_U \in A$ für alle $U \subset A$, oder es ist $A^c \in \mathcal{U}$ und somit $x_U \in A$ für alle $U \subset A^c$. Wählen wir also $i_o := A$ im ersten und $i_o := A^c$ im zweiten Fall, so ist die Bedingung von Definition 10.11 erfüllt. $\square$

Nun können wir eine neue Charakterisierung von Kompaktheit formulieren.

Satz 10.14. Sei X ein Hausdorffraum. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) X ist kompakt;

(ii) jeder Ultrafilter konvergiert;

(iii) jedes universelle Netz konvergiert.

Beweis. $(i) \Rightarrow (iii)$. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein universelles Netz. Nach Satz 6.14 hat $(x_i)_{i\in I}$ einen Häufungspunkt x. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es entweder $i_o \in I$, sodass $x_i \in U$ für alle $i \succeq i_o$ oder es gibt $i_o \in I$, sodass $x_i \in U^c$ für alle $i \succeq i_o$. Der zweite Fall scheidet aus, da x ein Häufungspunkt des Netzes ist. Wir haben gezeigt, dass $\lim\limits_I x_i = x$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Wähle zu jedem $U \in \mathcal{U}$ ein $x_U \in \mathcal{U}$. Nach Voraussetzung existiert $x = \lim\limits_{\mathcal{U}} x_U$. Damit ist $\lim \mathcal{U} = x$.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz. Wir zeigen, dass $(x_i)_{i\in I}$ einen Häufungspunkt hat und wenden Satz 6.14 an. Sei $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}, B_i = \{x_j : j \succeq i\}$. Es gibt einen Ultrafilter $\mathcal{F} \supset \langle \mathcal{B} \rangle$. Sei $x = \lim \mathcal{F}$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es $V \in \mathcal{F}$ mit $V \subset U$. Da $B_i \in \langle \mathcal{B} \rangle \subset \mathcal{F}$, folgt dass $V \cap B_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$; d.h. zu jedem $i \in I$ gibt es $j \succeq i$ mit $x_j \in V \subset U$. Wir haben gezeigt, dass x ein Häufungspunkt des Netzes $(x_i)_{i\in I}$ ist. $\square$

Lemma 10.15. *Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, $(x_i)_{i\in I}$ ein universelles Netz in X. Dann ist $(f(x_i))_{i\in I}$ ein universelles Netz in Y.*

Beweis. Sei $B \subset Y$. Dann gilt: es gibt $i_o \in I$, sodass $x_i \in f^{-1}(B)$ für alle $i \succeq i_o$ oder es gibt $i_o \in I$, sodass $x_i \in f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c)$ für alle $i \succeq i_o$. Also ist $f(x_i)$ ab einem i_o in B oder $f(x_i)$ ist ab einem i_o in B^c. □

Jetzt läßt sich der Hauptsatz dieses Abschnitts in wenigen Zeilen beweisen.

Theorem 10.16 (Satz von Tychonov)**.** *Das Produkt von kompakten Räumen ist kompakt.*

Beweis. Sei X_α kompakt für $\alpha \in A, X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Sei $p_\beta : X \to X_\beta$ die β-te Projektion ($\beta \in A$). Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein universelles Netz in X. Dann ist $(p_\beta(x_i))_{i \in I}$ ein universelles Netz in X_β. Also existiert $x_\beta := \lim\limits_I p_\beta(x_i)$. Nach der Folgerung a) aus der Definition 5.7 ist $\lim\limits_I x_i = (x_\beta)_{\beta \in A}$ im Sinne der Produkttopologie auf X. Aus Satz 10.14 folgt, dass X kompakt ist. □

Wir wollen den Spezialfall betrachten, dass alle X_α identisch sind. Sei also X ein topologischer Raum und A eine Indexmenge. Sei $X_\alpha = X$ für alle $\alpha \in A$. Dann ist

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \mathcal{F}(A, X) \ ,$$

der Raum aller Funktionen $f : A \to X$. Denn jede solch eine Funktion f kann man ja auch als Familie $(f(\alpha))_{\alpha \in A}$ schreiben. Die Produkttopologie auf $\mathcal{F}(A, X)$ ist die gröbste Topologie derart, dass alle Auswertungsabbildungen

$$\begin{aligned} p_\alpha : \mathcal{F}(A, X) &\to X \\ f &\mapsto f(\alpha) \end{aligned}$$

stetig sind. Ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{F}(A, X)$ konvergiert genau dann gegen $f \in \mathcal{F}(A, X)$, wenn

$$\lim_I f_i(\alpha) = f(\alpha)$$

für alle $\alpha \in A$ (siehe Satz 5.5). Die Produkttopologie ist also genau die Topologie der punktweisen Konvergenz, die wir schon vorher betrachtet hatten

(Beispiel 5.6). Eine andere geläufige Bezeichnung für $\mathcal{F}(A, X)$ ist X^A. Man denke etwa daran, dass $X = \mathbb{R}$ und $A = \{1, \ldots, d\}$. Dann ist $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^d$. Das erklärt die Bezeichnungsweise. Aus dem Satz von Tychonov erhalten wir also folgendes Korollar.

Korollar 10.17. Sei A eine beliebige Mange. Dann ist $[-1, 1]^A$ kompakt.

Wir wollen nun noch einen Spezialfall anführen, der in der Funktionalanalysis eine große Rolle spielt. Sei E ein reeller normierter Vektorraum. Eine Linearform auf E ist eine lineare Abbildung $f : E \to \mathbb{R}$. Solch eine Linearform f ist stetig genau dann, wenn es $c \geq 0$ gibt, sodass

$$|f(x)| \leq c\|x\| \quad (x \in E) \ .$$

Mit E' bezeichnet man den Raum der stetigen Linearformen auf E. Definiert man

$$\|f\| := \min\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c\|x\| \quad \forall\, x \in E\} \ ,$$

so wird E' ein Banachraum. Dabei ist die Vektorraumstruktur punktweise definiert, d.h. man definiert für $f, g \in E', \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Linearform $\alpha f + \beta g : E \to \mathbb{R}$ durch $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$ $(x \in E)$. Man nennt E' den *Dualraum* von E. Neben der Normtopologie betrachtet man die *schwach*-Topologie* auf E'. Das ist die gröbste Topologie auf E' bzgl. die Auswertungsabbildung

$$q_x : E' \to \mathbb{R} \ , \ q_x(f) := f(x)$$

für jedes $x \in E$ stetig ist. Diese Topologie auf E' wird auch mit $\sigma(E', E)$ bezeichnet. Damit konvergiert nach Satz 5.5 ein Netz $(f_i)_{i \in I}$ in E' genau dann gegen $f \in E'$ bzgl. $\sigma(E', E)$, wenn

$$\lim_I f_i(x) = f(x) \ \text{ für alle } \ x \in E \ .$$

Nun betrachten wir die duale Einheitskugel

$$B' := \{f \in E' : \|f\| \leq 1\} \ .$$

Satz 10.18 (Alaoglu)**.** Die duale Einheitskugel B' ist bzgl. der schwach*-Topologie kompakt.

Beweis. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein universelles Netz in B'. Wir müssen zeigen, dass es schwach* konvergiert. Die Einschränkung $f_{i_{|_B}}$ von f_i auf die Einheitskugel $B := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ ist eine Abbildung von B nach $[-1,1]$. Damit ist also $(f_{i_{|_B}})_{i\in I}$ ein universelles Netz in $[-1,1]^B$ (das folgt aus Lemma 10.15). Aus Korollar 10.17 folgt, dass $\lim_I f_i(x)$ für alle $x \in B$ existiert. Ist $x \in E, x \notin B$, so ist $\frac{x}{\|x\|} \in B$. Da $f_i(x) = \|x\| f_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ folgt, dass $f(x) := \lim_I f_i(x)$ für alle $x \in E$ existiert. Es ist klar, dass $f : E \to \mathbb{R}$ linear ist. Da $|f(x)| = \lim_I |f_i(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in E$, ist $f \in B'$. $\square$

Bemerkung. a) Wenn der Raum E separabel ist, so kann man leicht eine Metrik auf B' angeben, die die *schwach*-Topologie* auf B' erzeugt. Damit hat auch jede Folge in B' eine schwach*-konvergente Teilfolge.
b) Auf E' ist die σ^*-Topologie nur metrisierbar, wenn $\dim E < \infty$.

11 Der Satz von Arzela-Ascoli

Eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^d$ mit der natürlichen Topologie ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Diese Tatsache ist uns aus den Grundvorlesungen geläufig. Sie ist nicht mehr richtig, wenn wir $\mathbb{R}^d$ durch einen unendlich-dimensionalen normierten Raum ersetzen. In jedem normierten Raum E mit $\dim E = \infty$ gibt es eine beschränkte Folge, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Anders ausgedrückt: die Kugeln $\bar{B}(0,r) := \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ sind zwar abgeschlossen und beschränkt, aber nie kompakt. Eine wichtige Aufgabe der Topologie ist es somit, die kompakten Teilmengen von Banachräumen oder auch allgemeineren topologischen Räumen zu bestimmen. Wir wollen hier den Raum

$$C(K,Y) := \{f : K \to Y : f \ \text{ ist stetig}\}$$

betrachten, wobei (Y,d) ein vollständiger metrischer Raum und K ein kompakter topologischer Raum ist. In § 9 hatten wir gesehen, dass $C(K,Y)$ vollständig bzgl. der Metrik

$$d(f,g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

ist, die wir auch hier auf $C(K,Y)$ betrachten wollen. Wir wollen untersuchen, wann eine Teilmenge H von $C(K,E)$ kompakt oder relativ kompakt ist. Dazu ist folgender Begriff wichtig.

Definition 11.1. a) Sei $x \in K$. Eine Teilmenge H von $C(K,Y)$ ist *gleichstetig* in x, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x gibt, sodass

$$d(f(x), f(y)) < \varepsilon \ \text{ für alle } \ y \in U \ \text{ und alle } \ f \in H \ .$$

b) Die Menge H heißt *gleichstetig*, wenn sie in jedem $x \in K$ gleichstetig ist.

Jede endliche Teilmenge H von $C(K,Y)$ ist automatisch gleichstetig (wie man leicht sieht). Aber die Menge

$$H = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C[0,1] = C([0,1];\mathbb{R})$$

mit $f_n(x) = x^n$ ist nicht gleichstetig (Übungsaufgabe). Die Bedeutung der Gleichstetigkeit liegt darin, dass ein gleichstetiges punktweise konvergentes Netz in $C(K,Y)$ schon gleichmäßig konvergiert.

Satz 11.2. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in $C(K,Y)$, sodass

$$f(x) := \lim_I f_i(x)$$

für alle $x \in K$ existiert. Ist die Menge $\{f_i : i \in I\}$ gleichstetig, so ist $f \in C(K,Y)$ und $\lim\limits_I f_i = f$ im Sinne von $C(K,Y)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung U_x von x derart, dass $d(f_i(x), f_i(y)) \le \varepsilon/3$ für alle $y \in U$ und alle $i \in I$. Insbesondere ist $d(f(x), f(y)) = \lim\limits_I d(f_i(x), f_i(y)) \le \varepsilon/3$ für alle $y \in U_x$. Somit ist f stetig. Da K kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_L \in K$ derart, dass $K = \bigcup\limits_{\ell=1}^{L} U_{x_\ell}$. Da $f(x_\ell) = \lim\limits_I f_i(x_\ell)$ für $\ell = 1, \ldots, L$ und da I gerichtet ist, finden wir $i_o \in I$ derart, dass $d(f(x_\ell), f_i(x_\ell)) \le \varepsilon/3$ für alle $i \succeq i_o$ und alle $\ell = 1, \ldots, L$. Sei nun $y \in K$. Dann gibt es $\ell \in \{1, \ldots, L\}$, sodass $y \in U_{x_\ell}$. Für $i \succeq i_o$ ist damit

$$d(f(y), f_i(y)) \le d(f(y), f(x_\ell)) + d(f(x_\ell), f_i(x_\ell)) + d(f_i(x_\ell), f_i(y)) \le \varepsilon\ .$$

Da $y \in K$ beliebig war, folgt dass $d(f, f_i) = \sup\limits_{y\in K} d(f(y), f_i(y)) \le \varepsilon$ für alle $i \succeq i_o$. Wir haben gezeigt, dass $f \in C(K,Y)$ und $\lim\limits_I f_i = f$ im Sinne der Metrik von $C(K,Y)$. □

Wir erinnern daran, dass eine Teilmenge A eines topologischen Raumes *relativ kompakt* heißt, wenn $\bar{A}$ kompakt ist. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M ist also genau dann relativ kompakt, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt (deren Grenzwert nicht notwendig in A liegt). Relativ kompakte Teilmengen in $C(K,Y)$ können folgendermaßen beschrieben werden.

Satz 11.3 (Arzela-Ascoli)**.** Sei K ein kompakter topologischer Raum, (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für eine Menge $H \subset C(K, Y)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) H ist relativ kompakt;

(ii) a) H ist gleichstetig und
b) für jedes $x \in K$ ist die Menge $H(x) := \{f(x) : f \in H\}$ relativ kompakt in Y.

Beweis. Man sieht leicht, dass $\bar{H}$ auch die Bedingungen a) und b) erfüllt. Deswegen können wir annehmen, dass H in $C(K, Y)$ abgeschlossen ist.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein universelles Netz in H. Wir müssen zeigen, dass es in $C(K, H)$ konvergiert. Für jedes $x \in K$ ist die Menge $\overline{H(x)}$ in Y kompakt. Der topologische Raum $X := \prod_{x\in K} \overline{H(x)}$ ist nach dem Satz von Tychonov kompakt. Indem wir $h \in H$ als $(h(x))_{x\in K}$ schreiben, können wir H als Teilmenge von X auffassen. Dann ist $(f_i)_{i\in I}$ auch ein universelles Netz in X (das folgt unmittelbar aus der Definition). Nach Satz 10.14 konvergiert also das Netz $(f_i)_{i\in I}$ in X gegen ein Element $f = (f(x))_{x\in X}$ bzgl. der Topologie von X, d.h. es ist $f(x) = \lim_I f_i(x)$ für alle $x \in K$. Aus Satz 11.2 folgt, dass f stetig ist und $(f_i)_{i\in I}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Sei H relativ kompakt. Für $x \in K$ ist die Auswertungsabbildung $\delta_x : C(K, Y) \to Y, f \mapsto f(x)$, stetig. Damit ist $\delta_x(\bar{H}) = \{f(x) : f \in \bar{H}\}$ kompakt, als stetiges Bild einer kompakten Menge. Da $H(x) \subset \delta_x(\bar{H})$, ist $H(x)$ relativ kompakt in Y.
a) Wir zeigen, dass H gleichstetig in jedem $x \in K$ ist. Andernfalls gibt es $x \in K$ und $\varepsilon > 0$, sodass zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in U$ und $f_U \in H$ existiert mit $d(f_U(x_U), f_U(x)) \geq \varepsilon$. Da H relativ kompakt ist, besitzt das Netz $(f_U)_{U\in\mathcal{U}}$ einen Häufungspunkt $f \in C(K, Y)$. Da f in x stetig ist, gibt es eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ derart, dass

$$d(f(y), f(x)) \leq \varepsilon/4 \ \text{ für alle } \ y \in V \ .$$

Da f Häufungspunkt des Netzes ist, gibt es $U \subset V$, sodass $d(f, f_U) \le \varepsilon/4$. Damit ist für dieses U,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\le d(f_U(x_U), f_U(x)) \\
&\le d(f_U(x_U), f(x_U)) + d(f(x_U), f(x)) + d(f(x), f_U(x)) \\
&\le d(f_U, f) + \frac{\varepsilon}{4} + d(f, f_U) \le \frac{3}{4}\varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

was einen Widerspruch darstellt. □

Als Anwendung des Satzes von Arzela-Ascoli wollen wir den Satz von Peano, Satz 11.5, über die lokale Existenz von Lösungen von Differenzialgleichungen beweisen. Wir benutzen den Schauderschen Fixpunktsatz (siehe die Bücher H. Heuser: "Analysis 2" oder Bolabas: "Functional Analysis" für zwei verschiedene Beweise).

Satz 11.4 (Schauderscher Fixpunktsatz)**.** Sei E ein normierter Raum, $C \subset E$ abgeschlossen und konvex. Sei $T : C \to C$ eine stetige Abbildung. Es gebe $K \subset E$ kompakt derart, dass $TC \subset K$. Dann gibt es $x^* \in C$, sodass $Tx^* = x^*$.

Eine Teilmenge C von E heißt *konvex*, wenn mit $x, y \in C$ auch die Strecke $[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 \le \lambda \le 1\}$ in C liegt.
Sei $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion und sei $u_o \in \mathbb{R}^d$. Der Satz von Peano 11.5 sagt, dass das Anfangswertproblem

$$(P) \begin{cases} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(0) &= u_o \end{cases}$$

eine lokale Lösung hat. Diese Lösung ist i. Allg. nicht eindeutig und kann im Allgemeinen nicht stetig auf $[0, \infty)$ fortgesetzt werden.

Satz 11.5 (Peano)**.** Es gibt $0 < \tau \le \infty$ und eine stetig-differenzierbare Funktion $u : [0, \tau) \to \mathbb{R}^d$, sodass

$$\begin{aligned}
u'(t) &= f(t, u(t)) \quad (0 \le t < \tau) \ ; \\
u(0) &= u_o \ .
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $M = \max\{\|f(t,x)\|_\infty : \|x-u_o\|_\infty \le 1, 0 \le t \le 1\}$. Wähle $\tau > 0$ mit $M\tau \le 1$ und definiere

$$C := \{u \in C([0,\tau],\mathbb{R}^d) : \|u(t)-u_o\|_\infty \le 1 \ \text{ für alle } \ t \in [0,\tau]\} \ .$$

Dann ist C konvex und abgeschlossen in $C([0,\tau],\mathbb{R}^d)$. Definiere

$$T : C \to C([0,\tau],\mathbb{R}^d) \text{ durch } \ (Tu)(t) := u_o + \int_0^t f(s,u(s))\,\mathrm{ds} \ .$$

a) Es ist $TC \subset C$. Sei nämlich $u \in C$, dann ist für $0 \le t \le 1$,

$$\|Tu(t)-u_o\|_\infty \le \int_0^\tau \|f(s,u(s))\|_\infty\,\mathrm{ds} \le M\tau \le 1 \ .$$

b) T ist stetig. Sei nämlich $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass

$$|x-y| \le \delta \Rightarrow \|f(s,x)-f(s,y)\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{\tau} \ .$$

Seien $u,v \in C$ mit $\|u-v\|_{C([0,\tau],\mathbb{R}^d)} \le \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|(Tu)(t)-(Tv)(t)\| &\le \int_0^t \|f(s,u(s))-f(s,v(s))\|\,\mathrm{ds} \\
&\le \frac{\varepsilon}{\tau}\cdot\tau = \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

c) Für $u \in C$ ist

$$\begin{aligned}
\|(Tu)(t)-(Tv)(s)\| &\le \int_s^t \|f(r,u(r))\|\,\mathrm{ds} \\
&\le M|t-s| \ .
\end{aligned}$$

Da für $u \in C$ gilt $\|(Tu)(t)-u_o\|_\infty \le 1$ (siehe a)), ist $\|Tu\|_{C([0,\tau],\mathbb{R}^d)} \le 1+\|u_o\|$. Es ist also $TC \subset K$ mit

$$K := \{v \in C([0,\tau];\mathbb{R}^d) : \|v(t)-v(s)\|_\infty \le M|t-s| \ , \ \|v\|_\infty \le 1+\|u_o\|_\infty\} \ .$$

Die Menge K ist abgeschlossen, beschränkt und gleichstetig. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli 11.3 ist sie kompakt. Nach dem Fixpunktsatz von Schauder gibt es $u \in C$ mit $Tu = u$; d.h.

$$u(t) = u_o + \int_0^t f(s, u(s))\ ds\ .$$

Damit ist u eine Lösung. $\square$

12 Stetige Funktionen

Trägt ein Raum X die indiskrete Topologie, so ist jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konstant, es gibt also wenig stetige Funktion; trägt er die diskrete Topologie, so sind alle Funktionen stetig; es gibt also sehr viele. Wir fragen uns in diesem Abschnitt, welche Eigenschaften eines topologischen Raumes X implizieren, dass es viele stetige von Funktionen X nach $\mathbb{R}$ gibt.

Definition 12.1. Ein topologischer Raum X heißt *normal*, falls er Hausdorffsch ist und *man disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennen kann*; das soll Folgendes heißen: sind $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es offene Mengen $U, V \subset X$ derart, dass $U \cap V = \emptyset, A \subset U, B \subset V$.

Satz 12.2. Jeder metrische Raum ist normal.

Wir benutzen folgendes Lemma.

Lemma 12.3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Für $x \in X$ setzen wir*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} .$$

Dann gilt

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) . \tag{12.1}$$

Insbesondere ist die Abbildung $x \mapsto d(x, A) : X \to \mathbb{R}_+$ stetig.

Beweis. Seien $x, y \in M$. Für $a \in A$ gilt

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) .$$

Damit ist $d(x, A) \leq d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a) = d(x, y) + d(y, A)$. Wir haben gezeigt, dass

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) .$$

Vertauschen von x und y liefert

$$-(d(x, A) - d(y, A)) \leq d(x, y) \ .$$

Daraus folgt (12.1). $\square$

Beweis von Satz 12.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subset X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$. Wir nehmen ferner an, dass $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ (sonst ist die Aussage trivial). Sei $f(x) = \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x, B)$. Dann ist $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und

$$\begin{aligned} f(x) = -\operatorname{dist}(x, B) < 0 \quad &\text{wenn} \quad x \in A \text{ und} \\ f(x) = \operatorname{dist}(x, A) > 0 \quad &\text{wenn} \quad x \in B \ . \end{aligned}$$

Somit erfüllen $U := \{x \in X : f(x) < 0\}$ und $V := \{x \in X : f(x) > 0\}$ die Anforderungen aus Definition 12.1. $\square$

Satz 12.4. Jeder kompakte Raum ist normal.

Der folgende Satz zeigt, dass es auf normalen topologischen Räumen viele stetige reellwertige Funktionen gibt.

Theorem 12.5 (Lemma von Urysohn)**.** *Sei X ein normaler topologischer Raum und seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ derart, dass $f_{|_A} = 0$ und $f_{|_B} = 1$.*

Wir benötigen folgenden Hilfssatz.

Lemma 12.6. *Sei X normal, sei $A \subset X$ abgeschlossen und sei $U \subset X$ offen, sodass $A \subset U$. Dann gibt es eine offene Menge V in X mit*

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U.$$

Beweis. A und $X \setminus U$ sind abgeschlossen und disjunkt. Daher gibt es offene Mengen $V, W \subset X$, sodass

$$A \subset V, X \setminus U \subset W \quad \text{und} \quad V \cap W = \emptyset \ .$$

Da $V \cap W = \emptyset$, ist $V \subset W^c$. Aber W^c ist abgeschlossen. Damit ist $\bar{V} \subset W^c \subset U$. $\square$

Beweis von Theorem 12.5. Da $X \setminus B$ offen ist und A umfasst, gibt es nach Lemma 12.6 eine offene Menge $U_{1/2} \subset X$ mit

$$A \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset X \setminus B \ .$$

Genauso finden wir offene Mengen $U_{1/4}, U_{3/4}$ mit

$$A \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset X \setminus B \ .$$

Im nächsten Schritt finden wir offene Mengen $U_{1/3}, U_{3/8}, U_{5/8}$ und $U_{7/8}$ mit

$$\begin{aligned} A &\subset U_{1/8} \subset \overline{U_{1/8}} \subset U_{1/4} \subset \overline{U_{1/4}} \\ &\subset U_{3/8} \subset \overline{U_{3/8}} \subset U_{1/2} \subset \overline{U_{1/2}} \subset U_{5/8} \subset \overline{U_{5/8}} \\ &\subset U_{3/4} \subset \overline{U_{3/4}} \subset U_{7/8} \subset \overline{U_{7/8}} \subset X \setminus B \ . \end{aligned}$$

Sei D die Menge der dyadischen Zahlen in $(0,1)$, d.h. alle Zahlen der Form

$$\frac{m}{2^n} \ , \ m \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\} \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Wenn wir den obigen Prozess fortführen finden wir eine offene Menge U_t, sodass $s, t \in D, s < t$ gilt

$$A \subset U_s \subset \overline{U_s} \subset U_t \subset \overline{U_t} \subset X \setminus B \ .$$

Definiere

$$f(x) := \begin{cases} \sup \quad \{t \in D : x \notin U_t\} & \text{falls} \ \ x \notin \bigcap\limits_{t \in D} U_t \\ 0 \qquad \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Es ist klar, dass $f = 0$ auf A und $f = 1$ auf B. Ferner ist $f(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in X$. Um die Stetigkeit von f zu zeigen, reicht es nachzuweisen, dass

$$f^{-1}([0, a)) \text{ und } f^{-1}((a, 1])$$

für alle $a \in [0, 1]$ offen sind (beachte, dass die Mengen $[0, a), (a, 1], 0 \leq a \leq 1$ eine Subbasis der Relativtopologie auf $[0, 1]$ bilden). Sei $a \in [0, 1]$. Dann ist

$$f(x) < a \Leftrightarrow \exists\, t \in D, \text{ sodass } t < a \text{ und } x \in U_t \ .$$

[“$\Rightarrow$” Ist $f(x) < a$, so gibt es $t \in D$ mit $f(x) < t < a$. Damit ist $fx \in U_t$ nach Definition von $f(x)$.
“$\Leftarrow$” Sei $f(x) \geq a$. Dann gibt es zu $t < a, t < s \leq f(x)$ mit $s \in D$ und $x \notin U_s$. Damit ist $x \notin U_t$.] Somit ist

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{t<a} U_t$$

offen. Ähnlich gilt $f(x) > a$ genau dann, wenn es $t \in D, t > a$ gibt mit $x \notin \overline{U_t}$.
[“$\Rightarrow$” Sei $f(x) > a$. Dann gibt es $a < s$ mit $s \in D$ mit $x \notin U_s$; wähle $a < t < s, t \in D$, dann ist $x \notin \overline{U_t}$, da $\overline{U_t} \subset U_s$.
“$\Leftarrow$” Sei $f(x) \leq a$ und sei $t \in D$ mit $t > a$. Dann ist $x \in U_t \subset \overline{U_t}$ nach Definition von f.] Somit ist

$$f^{-1}((a, 1]) = \bigcup_{t>a} X \setminus \overline{U_t}$$

offen. □

Man kann in Lemma 12.5 von Urysohn andere Intervalle betrachten.

Korollar 12.7. Sei X normal und seien $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Sei $a < b$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [a, b]$, sodass $f = a$ auf A und $f = b$ auf B.

Beweis. Nach Lemma 12.5 von Urysohn gibt es eine stetige Funktion $g : X \to [0,1]$ mit $g = 0$ auf A und $g = 1$ auf B. Definiere

$$f(x) := (b-a)g(x) + a \ .$$

$\square$

Als Anwendung zeigen wir, dass der Raum $[0,1]^J$ in gewisser Weise ein universeller kompakter Raum ist.

Korollar 12.8. Sei X ein topologischer Raum. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) X ist kompakt;

(ii) es gibt eine Indexmenge J, sodass X homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge von $[0,1]^J$ ist.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$ trivial;
$(i) \Rightarrow (ii)$ Sei $J := C(X,[0,1])$ und definiere

$$\varphi : X \to [0,1]^J \quad \text{durch} \quad \varphi(x) = (f(x))_{f \in J} \ .$$

Dann ist φ stetig, denn $\lim_I x_i = x$ in X impliziert $\lim_I f(x_i) = f(x)$ für alle $f \in J$, und damit $\lim_I \varphi(x_i) = \varphi(x)$ nach Definition der Produkttopologie. Das Lemma 12.5 von Urysohn zeigt, dass φ injektiv ist. Die Menge $A = \varphi(X)$ ist kompakt und $\varphi_o : X \to A, x \mapsto \varphi(x)$ ist bijektiv und stetig. Da X kompakt ist, ist φ_o ein Homöomorphismus. $\square$

13 Zusammenhängende Räume

Die Menge $X = (0,1) \cup (2,3)$ mit der natürlichen Metrik hat $A = (0,1)$ als eine Teilmenge die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Wenn es nur triviale offen- und abgeschlossene Teilmengen in einem topologischen Raum gibt, so nennt man ihn zusammenhängend.

Definition 13.1. a) Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, falls gilt: Sind $O_1, O_2 \subset X$ offen, disjunkt mit $X = O_1 \cup O_2$, so ist $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$.
b) Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *zusammenhängend*, falls sie bzgl. der Relativtopologie zusammenhängend ist; d.h. also, wenn $A \subset O_1 \cup O_2$ mit $O_1, O_2 \subset X$ offen mit $O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset$, so gilt $A \subset O_1$ oder $A \subset O_2$.

Beispiel 13.2. $X = \mathbb{Q}$ mit der natürlichen Topologie ist nicht zusammenhängend, da $X = O_1 \cup O_2, O_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}, O_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}$.

Lemma 13.3. *Sei X ein topologischer Raum, A eine Indexmenge. Zu $\alpha \in A$ sei X_α eine zusammenhängende Teilmenge von X. Ist $\bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $p \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Seien $O_1, O_2 \subset X$ offen und disjunkt, sodass $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \subset O_1 \cup O_2$. Damit ist $p \in O_1 \cup O_2$, etwa $p \in O_1$. Da $p \in X_\alpha \subset O_1 \cup O_2$ und da X_α zusammenhängend ist, folgt dass $X_\alpha \subset O_1$ für alle $\alpha \in A$. Also ist $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \subset O_1$. $\square$

Satz 13.4. Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist es auch $f(X)$.

Beweis. Sei $f(X) \subset O_1 \cup O_2$ wobei $O_1, O_2 \subset Y$ offen und disjunkt sind. Damit ist $X \subset f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$. Da X zusammenhängend ist, folgt $X \subset$

$f^{-1}(O_1)$ oder $X \subset f^{-1}(O_2)$. Im ersten Fall ist $f(X) \subset O_1$, im zweiten $f(0) \subset O_2$. $\square$

Aufgabe 13.5. Ist $Y \subset X$ zusammenhängend und ist $Y \subset B \subset \bar{Y}$, so ist B zusammenhängend.

Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind leicht zu bestimmen.

Satz 13.6. Sei J eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) J ist zusammenhängend;

(ii) J ist ein Intervall oder 1-elementig.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$ Sei J ein Intervall und seien $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}$ offen, sodass $O_1 \cap O_2 \cap J = \emptyset$. Angenommen es gibt $x \in O_1 \cap J, y \in O_2 \cap J$. Dann ist $[x, y] \subset J$. Sei $z = \sup[x, y] \cap O_1$. Dann ist $x < z < y$. Ist $z \in O_1$, so ist $[z, z + \varepsilon] \subset O_1$ für $\varepsilon > 0$ genügend klein. Das ist ein Widerspruch zur Definition von z. Also ist $z \in O_2$. Damit ist $[z - \varepsilon, z] \subset O_2$ für ein $0 < \varepsilon < (z - x)$ und somit $[z - \varepsilon, z] \cap O_1 \neq \emptyset$. Auch das ist ein Widerspruch zur Definition von z. Wir haben gezeigt, dass $J \not\subset O_1 \cup O_2$. Damit ist J zusammenhängend.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sei J zusammenhängend mit mindestens zwei Elementen. Sei $a = \inf J \in [-\infty, \infty), b = \sup J \in (-\infty, \infty]$. Somit ist $J \subset [a, b]$. Sei $a < c < b$. Wäre $c \notin J$, so wäre $J \subset O_1 \cup O_2$ mit $O_1 = (-\infty, c), O_2 = (c, \infty)$ aber $J \not\subset O_1$ und $J \not\subset O_2$. Das widerspricht der Annahme, dass J zusammenhängend ist. Wir haben also gezeigt, dass $(a, b) \subset J$. Folglich ist $J = (a, b)$ oder $J = [a, b]$ oder $J = (a, b]$ oder $J = [a, b]$ je nachdem ob $a \in J$ oder $b \in J$. In jedem Fall ist J ein Intervall. $\square$

Korollar 13.7 (Zwischenwertsatz)**.** Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $x, y \in X, c \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) < c < f(y) .$$

Dann gibt es $z \in X$ mit $f(z) = c$.

Beweis. Nach Satz 12.4 ist $f(X)$ zusammenhängend, also ist $f(X)$ ein Intervall. $\square$

Definition und Satz 13.8 (Komponenten)**.** Sei X ein topologischer Raum. Dann definiert

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists\, A \subset X \text{ zusammenhängend mit } x, y \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf X. Man nennt die Äquivalenzklassen die *Zusammenhangskomponenten* (kurz: *Komponenten*) von X.

Eigenschaften:

(a) Verschiedene Komponenten sind disjunkt;

(b) Die Vereinigung der Komponenten ist X;

(c) ist $x \in X$, so ist die Komponente $[x] := \{y \in X : y \sim x\}$ von $[x]$ die größte zusammenhängende Menge, die x enthält;

(d) jede Komponente ist abgeschlossen und zusammenhängend;

(e) ist $\emptyset \neq A \subset X$ zusammenhängend, so gibt es genau eine Komponente ω mit $A \subset \omega$.

Beweis. 1. Die Transitivität sieht man so: Sei $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gibt es zusammenhängende Mengen A, B mit $x, y \in A$ und $y, z \in B$. Damit ist $y \in A \cap B$. Aus Lemma 13.3 folgt, dass $A \cup B$ zusammenhängend ist. Da $x, z \in A \cup B$, gilt also $x \sim z$.
2. (a) und (b) gelten immer für Äquivalenzklassen.
(c) Sei $x \in X$. Dann ist wegen Lemma 13.3 $[x] = \bigcup_{\substack{A \text{ zshgd.} \\ x \in A}} A$. Aufgabe 13.5 zeigt, dass $[x]$ abgeschlossen ist. Die weiteren Eigenschaften (d), (e) folgen unmittelbar. $\square$

Beispiel 13.9. Sei $X = \mathbb{Q}$ mit der natürlichen Topologie. Damit ist $[x] = \{x\}$ für alle $x \in X$. Man gibt dieser Eigenschaft einen Namen:

Ein topologischer Raum X heißt *total unzusammenhängend*, wenn $[x] = \{x\}$ für jedes $x \in X$.

Definition 13.10. Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu jedem $x, y \in X$ eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to X$ (also einen *Weg*) gibt, sodass $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Satz 13.11. Jeder wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.

Beweis. Sei $X = O_1 \cup O_2, O_1, O_2$ offen. Sei $x \in O_1, y \in O_2$. Dann gibt es nach Voraussetzung eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Da $X = O_1 \cup O_2$, ist $[0,1] = \gamma^{-1}(O_1) \cup \gamma^{-1}(O_2)$. Da $[0,1]$ zusammenhängend ist, gibt es $t \in \gamma^{-1}(O_1) \cap \gamma^{-1}(O_2)$. Damit ist $\gamma(t) \in O_1 \cap O_2$. Es ist also $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. $\square$

Die Umkehrung von Satz 13.11 gilt nicht.

Beispiel 13.12 (Kamm)**.** Sei $X_o := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left(\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]\right) \cup ([0,1] \times \{0\})\right)$ mit der natürlichen Topologie von $\mathbb{R}^2$. Dann ist X_o wegzusammenhängend (man mache eine Zeichnung), also zusammenhängend. Sei $p := (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Da $p \in \overline{X_o}$, ist nach Aufgabe 13.5 auch $X := X_o \cup \{p\}$ zusammenhängend. X ist jedoch nicht wegzusammenhängend. Andernfalls gäbe es eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = (1,0)$. Es ist $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ mit stetigen Funktionen $\gamma_j : [0,1] \to \mathbb{R}, j = 1,2; \gamma_1(0) = 0, \gamma_2(0) = 1, \gamma_1(1) = 1, \gamma_2(1) = 0$. Damit gibt es $0 < t_o < 1$, sodass $\gamma_2(t) \geq \frac{1}{2}$ für $t \in [0, t_o]$, aber $\gamma_1(t_o) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $s \in (0, t_o]$, sodass $\gamma_1(s) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Damit ist $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \notin X$.

Für offene Teilmengen eines normierten Raumes gilt jedoch folgende Aussage:

Satz 13.13. Sei $(E, \| \|)$ ein normierter Raum. Eine offene Teilmenge Ω von E ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Beweis. Sei Ω zusammenhängend und sei $x \in \Omega$. Sei

$$A = \{y \in \Omega : \text{ man kann } x \text{ mit } y \text{ durch einen Weg verbinden}\} .$$

Sei $y \in A$. Es gibt $r > 0$, sodass $B(y, r) \subset \Omega$. Sei $z \in B(y, r)$. Es gibt einen Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ mit $\gamma(\alpha) = x, \gamma(\beta) = y$. Definiere $\bar{\gamma} : [\alpha, \beta + 1] \to \Omega$ durch

$$\bar{\gamma}(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{wenn} \quad t \in [\alpha, \beta] \\ y + (s - \beta)(z - y) & \text{für} \quad s \in [\beta, \beta + 1] . \end{cases}$$

Dann ist $\bar{\gamma}(\alpha) = x$ und $\bar{\gamma}(\beta+1) = z$. Also ist A offen und $\neq \emptyset$. Genauso zeigt man, dass $\Omega \setminus A$ offen ist. Da Ω zusammenhängend ist, folgt dass $A = \Omega$. $\square$

Korollar 13.14. Sei $(E, \| \|)$ ein normierter Raum und $\Omega \subset E$ offen. Dann ist jede Zusammenhangskomponente von Ω offen.

Beweis. Sei $x \in \Omega$. Ist $y \in [x] \subset \Omega$, so gibt es $r > 0$, sodass $B(y, r) \subset \Omega$. Da $B(y, r)$ zusammenhängend ist, ist $[x] \cup B(y, r)$ zusammenhängend (Lemma 13.3). Also ist $[x] \cup B(y, r) \subset [x]$, d.h. $B(y, r) \subset [x]$. $\square$

14 Anhang: Der Satz von Zermelo

Sei S eine Menge. Wir sagen, dass sich S *wohl ordnen* lässt, wenn es eine Ordnungsrelation $\leq$ auf S gibt bzgl. der S wohl geordnet ist, d.h., dass jede Teilmenge von S ein minimales Element besitzt.

Satz 14.1 (Zermelo)**.** Jede nicht-leere Menge S lässt sich wohlordnen.

Beweis. Sei

$$\mathcal{P} := \{M \subset S : \text{es gibt eine Ordnungsrelation } \leq_M \text{ auf } M \text{ die wohlgeordnet ist}\} .$$

Wir definieren für $M, N \in \mathcal{P}$ eine $\preceq$-Relation durch

$$M \preceq N :\Leftrightarrow \begin{cases} a) \; M \subset N \text{ und } x \leq_M y \Leftrightarrow x \leq_N y \text{ für alle } x, y \in M \; ; \\ b) \; x \leq_N y, y \in M, x \in N \Rightarrow x \in M \; . \end{cases}$$

$\mathcal{P}$ ist bzgl. $\preceq$ induktiv geordnet. Sei nämlich $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ eine Kette, $M := \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$. Wir definieren

$$x \leq_M y :\Leftrightarrow \exists\, K \in \mathcal{K}, x, y \in K, x \leq_K y \; .$$

Man sieht aus a) und b), dass diese Definition nicht von der Wahl von K abhängt und eine Ordnungsrelation auf M definiert. Wir zeigen nun, dass M wohlgeordnet ist. Sei $T \subset M, T \neq \emptyset$. Sei $K_o \in \mathcal{K}$, sodass $K_o \cap T \neq \emptyset$. Dann hat $K_o \cap T$ ein kleinstes Element bzgl. der Ordnung von K_o; d.h. es gibt $t_o \in K_o \cap T$ mit $t_o \leq_{K_o} x$ für alle $x \in T \cap K_o$. Wir zeigen, dass t_o das kleinste Element von T bzgl. $\leq_M$ ist. Sei $y \in T$ beliebig. Dann gibt es $K \in \mathcal{K}$ mit $y \in K$.
1. Fall: $K \subset K_o$. Da $t_o \leq_{K_o} y$, gilt $t_o \leq_M y$.
2. Fall: $K_o \subset K$. Es gilt $t_o \leq_K y$ oder $y \leq_K t_o$. Falls $y \leq_K t_o$, ist $y \in K_o$ (wegen b)), und somit ist $y \leq_{K_o} t_o$. Da t_o das kleinste Element von $K_o \cap T$ ist, folgt $y = t_o$. Somit ist $t_o \leq_K y$ in jedem Fall, und damit $t_o \leq_M y$. Wir haben gezeigt, dass M bzgl. $\leq_M$ wohlgeordnet ist. Es gilt $K \preceq M$ für alle

$K \in \mathcal{K}$. Dazu muss man a) und b) nachweisen. Eigenschaft a) folgt direkt aus der Definition der Ordnung auf M. Um b) zu zeigen, nehmen wir

$$x, y \in M \text{ mit } x \leq_M y, y \in K \ .$$

Wir müssen zeigen, dass $x \in K$. Es gibt $K' \in \mathcal{K}$, sodass $x, y \in K'$ und $x \leq_{K'} y$. Da $\mathcal{K}$ eine Kette ist, gilt $K \preceq K'$ oder $K' \preceq K$. Im zweiten Fall ist $x \in K$. Im ersten Fall ist $x \leq_{K'} y$. Da $K \preceq K'$, folgt daraus ebenfalls, dass $x \in K$. Damit ist b) bewiesen. Somit ist M eine obere Schranke von $\mathcal{K}$. Nach Lemma 10.8 von Zorn existiert ein maximales Element L von $\mathcal{P}$. Angenommen $L \neq S$. Wähle $a \in S \setminus L$ und definiere $x \leq_{L'} a$ für alle $x \in L$ und $x \leq_{L'} y :\Leftrightarrow x \leq_L y$ für $x, y \in L$. Dann ist $L' := L \cup \{a\}$ wohlgeordnet und $L \preceq L'$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von L. $\square$

Oft benutzt man den Satz 14.1 von Zermelo , um einen Beweis über transfinite Induktion zu führen. Das ist ein üblicher Induktionsbeweis, bei dem allerdings $\mathbb{N}$ durch eine beliebige wohlgeordnete Menge ersetzt wird.

Satz 14.2 (transfinite Induktion)**.** Sei A wohlgeordnet und $B \subset A$. Es gelte:

a) $1 \in B$, wobei $1 = \min A$.

b) Ist $\alpha \in A$, sodass $\beta \in B$ für alle $\beta \in A$ mit $\beta < \alpha$, dann gilt $\alpha \in B$.

Dann ist $A = B$.

Beweis. Ist $A \neq B$, so gibt es $a_o \in A \setminus B$ mit $a_o \leq a$ für alle $a \in A \setminus B$. Damit ist $b < a_o$ für alle $b \in B$. Das widerspricht der Annahme b). $\square$

Oft benutzt man die transfinite Induktion in folgender Weise. Sei A eine wohlgeordnete Menge. Für jedes $\alpha \in A$ sei $P(\alpha)$ eine Aussage. Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. $P(1)$ ist richtig, wobei $1 = \min A$.

2. Ist $\alpha \in A$, sodass $P(\beta)$ für jedes $\beta < \alpha$ gültig ist, dann ist auch $P(\alpha)$ richtig.

Dann ist die Aussage $P(\alpha)$ für alle $\alpha \in A$ richtig.

Literatur

[1] James Munkres: *Topology.* Pentrice Hall, 2000.

[2] Boto von Querenburg: *Mengentheoretische Topologie.* Springer, 2001.

[3] Volker Runde: *A Taste of Topology.* Springer, 2005.