Universität Ulm

Donnerstag, 28.10.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Funktionalanalysis: Blatt 1

1. Sei X ein Banachraum und $(x_n) \subset X$. Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sei konvergent. Zeige, dass dann $x_n \to 0$ gilt! (2)

2. Sei $c \coloneqq \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : (x_n) \text{ konvergiert}\}$. Zeige, dass c mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum ist! (2)

3. Seien E und F normierte Räume und $T\colon E \to F$ linear. Zeige:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent: (5)

(i) T ist stetig.
(ii) T ist stetig in 0.
(iii) Es gibt $c \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in E$.
(iv) Es gibt $c \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq c$ für alle $x \in E$ mit $\|x\| \leq 1$.
(v) Es gibt $c \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq c$ für alle $x \in E$ mit $\|x\| = 1$.

Ist eine der obigen Bedingungen erfüllt, so nennt man T auch *beschränkt* und schreibt

$$\|T\| \coloneqq \inf\bigl\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| \text{ für alle } x \in E\bigr\}.$$

Tipp: Für die „(ii) ⇔ (iii)" bietet sich die ε-δ-Definition der Stetigkeit an. „(i) ⇔ (ii)" und „(iii) ⇔ (iv) ⇔ (v)" folgen aus der Linearität von T.

(b) Es gilt $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$ für alle $x \in E$. (2)

(c) Definiere $s \coloneqq \sup\bigl\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\bigr\}$. Der Operator T ist genau dann beschränkt, wenn $s < \infty$ ist. In diesem Fall gilt $\|T\| = s$. (2)

4. Sei X ein Banachraum. Wir schreiben

$$\ell^1_X \coloneqq \Bigl\{\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \|\mathbf{x}\|_1 \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty\Bigr\}$$

und

$$\mathrm{BV}_X(\mathbb{N}) \coloneqq \Bigl\{\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : V(\mathbf{x}) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < \infty\Bigr\}.$$

Für $\mathbf{x} \in \mathrm{BV}_X(\mathbb{N})$ setzen wir $\|\mathbf{x}\|_{\mathrm{BV}} \coloneqq \|x_1\| + V(\mathbf{x})$. Zeige, dass ℓ^1_X versehen mit $\|\cdot\|_1$ und $\mathrm{BV}_X(\mathbb{N})$ versehen mit $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ jeweils ein Banachraum ist! (7)
Tipp: Rechne mit der Definition nach, dass $(\ell^1_X, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum ist. Gib dann einen isometrischen Isomorphismus zwischen den beiden Räumen an, um zu schlussfolgern, dass auch $(\mathrm{BV}_X(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\mathrm{BV}})$ ein Banachraum ist.