Universität Ulm

Donnerstag, 25.11.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+5

Funktionalanalysis: Blatt 5

18. Sei $L^2_{2\pi} := \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar, } 2\pi\text{-periodisch} : \int_0^{2\pi} |f|^2 < \infty \right\}$ mit dem Skalarprodukt

$$(u \mid v)_2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\overline{v}$$

versehen. Da $\mathrm{C}_{2\pi}$ in $L^2_{2\pi}$ dicht ist, ist $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2_{2\pi}$.

(a) Berechne die Fourierkoeffizienten der Funktion $f \in L^2_{2\pi}$, die auf $[0, 2\pi)$ durch $f(x) = 1$ für $x \in [0, \pi]$ und $f(x) = 0$ für $x \in (\pi, 2\pi)$ gegeben ist! (2)

(b) Zeige $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$! (2)
Tipp: Parseval'sche Gleichung.

(c) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$! (2)

19. Sei X ein Banachraum und $F \neq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X. Zeige, dass die Quotientenabbildung $q\colon X \to X/F$, $x \mapsto x + F$ die offene Einheitskugel in X auf die offene Einheitskugel in X/F abbildet und schlussfolgere $\|q\| = 1$! (2)

20. Seien E und F Banachräume und bezeichne $\mathscr{R}(E, F)$ die Menge der injektiven Operatoren $T \in \mathscr{L}(E, F)$, deren Bild ein abgeschlossener Unterraum von F ist. Zeige:

(a) Es ist $T \in \mathscr{R}(E, F)$ genau dann, wenn es eine Konstante $\alpha > 0$ mit $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ für alle $x \in E$ gibt. (2)

(b) $\mathscr{R}(E, F)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(E, F)$. (2)

(c) Falls es ein $T_0 \in \mathscr{L}(E, F)$ gibt, für das $\operatorname{Rg} T_0$ nicht abgeschlossen ist, so ist die Menge $M := \{T \in \mathscr{L}(E, F) : \operatorname{Rg} T \text{ abgeschlossen}\}$ nicht offen in $\mathscr{L}(E, F)$. (2)

21. Sei X ein Banachraum und U ein Unterraum von X. Dann heißt U *projezierbar*, falls es eine Projektion $P \in \mathscr{L}(X)$ mit $\operatorname{Rg} P = U$ gibt. Zeige:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent: (2)

(i) U ist projezierbar.

(ii) U ist abgeschlossen und es gibt einen abgeschlossenen Unterraum V von X mit $U \oplus V = X$.

(b) Ist U projezierbar, so ist X/U zu einem Unterraum von X isomorph. (2)

(c) **Bonusaufgabe:** c_0 ist in ℓ^∞ nicht projezierbar. (+5)
Tipp: Zeige, dass es keine abzählbare punktetrennende Teilmenge von $(\ell^\infty/c_0)'$ gibt.

22. Sei $1 < p < \infty$ und $-\infty < a < b < \infty$. Laut Vorlesung gibt es $c_{a,b} \geq 0$ mit

$$\|u\|_\infty \leq c_{p,a,b}\|u\|_{W^{1,p}(a,b)} = c_{p,a,b}\big(\|u\|_p + \|u'\|_p\big)$$

für alle $u \in W^{1,p}(a, b)$. Finde einen expliziten Wert für $c_{p,a,b}$! (2)
Bemerkung: Der explizite Wert muss nicht optimal sein.
Hinweis: Es darf benutzt werden, dass $u \in \mathrm{C}[a, b]$ und $u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $u \in W^{1,p}(a, b)$ und $x \in [a, b]$ gilt.

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws10/fa.html