Universität Ulm

Donnerstag, 10.02.2011

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+3

Funktionalanalysis: Blatt 13

59. Sei E ein lokalkonvexer Raum und $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ linear. Zeige:

(a) Ist $e \in E$ und $\varphi(e) \neq 0$, so gilt $E = \operatorname{Kern}\varphi \oplus \langle e \rangle$. (2)

(b) φ ist genau dann stetig, wenn $\operatorname{Kern}\varphi$ abgeschlossen ist. (2)

60. Seien E_1 und E_2 zwei lokalkonvexe Räume über demselben zugrundeliegenden Vektorraum. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (2)

(i) $E_1' \subset E_2'$.

(ii) Jede abgeschlossene konvexe Teilmenge von E_1 ist in E_2 abgeschlossen.

61. Seien E und F Banachräume und sei $\mathscr{L}_{\mathrm{wop}}(E,F)$ der mit der schwachen Operatortopologie versehene Raum $\mathscr{L}(E,F)$, also mit der von $P := \{p_{x,y'} : x \in E, y' \in F'\}$ definierten lokalkonvexen Topologie, wobei $p_{x,y'}(T) := |\langle y', Tx \rangle|$ ist. Zeige:

(a) Es gilt genau dann $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathrm{wop}}(E,F)'$, wenn es Vektoren $(x_i)_{i=1}^m$ und $(y_i')_{i=1}^m$ gibt mit $\varphi(T) = \sum_{i=1}^m \langle y_i', Tx_i \rangle$. (2)

(b) Sei $C \subset \mathscr{L}(E,F)$ konvex. Die Menge C ist genau dann abgeschlossen in $\mathscr{L}_{\mathrm{wop}}(E,F)$, wenn sie in $\mathscr{L}_{\mathrm{stop}}(E,F)$ abgeschlossen ist. (2)

(c) Sei $E = F = \ell^2$. Es gibt eine normabgeschlossene konvexe Menge in $\mathscr{L}(E,F)$, die in $\mathscr{L}_{\mathrm{wop}}(E,F)$ nicht abgeschlossen ist. (2)

62. Sei $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ wie in Aufgabe 57 definiert, wobei wir nur reellwertige Funktionen zulassen. Wir betrachten den positiven Kegel $\mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N) := \{u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) : u(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N\}$. Zeige:

(a) Es gibt $\eta_n \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$ mit $\eta_n(x) \geq 1$ für $|x| \leq n$. (2)
Tipp: Zeige zuerst $\eta \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$ für $\eta(x) := \exp\big(\frac{1}{1-|x|^2}\big)\, \mathbb{1}_{\{|x|<1\}}$.

(b) Sei $K_n := \{x \in \mathbb{R}^N : n-1 \leq |x| \leq n\}$, $p_n(u) := \sup_{x \in K_n} |u(x)|$ und $a_n \geq 0$. Dann definiert $p(u) := \sum_{n=1}^\infty a_n p_n(u)$ eine stetige Halbnorm p auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. (2)

(c) Sei $\varphi\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ positiv bezüglich $\mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$, und sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\varphi(u)| \leq \sum_{n=1}^{n_0} \varphi(\eta_n)\, p_n(u)$. (2)

(d) Ist $\varphi\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ positiv bezüglich $\mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$, so ist φ stetig. (2)

63. Sei E ein lokalkonvexer Raum und E' mit der von den Halbnormen $P := \{p_x : x \in E\}$ induzierten Topologie versehen, wobei wir $p_x(x') := |\langle x', x \rangle|$ definieren. Sei $\varphi\colon E' \to \mathbb{K}$ linear und stetig. Zeige, dass es dann genau ein $x \in E$ mit $\varphi(x') = \langle x', x \rangle$ für alle $x' \in E'$ gibt! (+3)
Bemerkung: Dies zeigt, dass für einen Banachraum ein Element von E'' genau dann in E liegt, wenn es bezüglich der schwach*-Topologie stetig ist.