Themenvorschläge zum Seminar Differentialgleichungen

Allgemeine Informationen

- Jedes dieser Themen soll im Rahmen eines einzelnen Treffen (etwa 90 Minuten) vorgestellt werden. Sollte sich bei der Vorbereitung zeigen, dass die hier vorgeschlagenen Aspekte eines Themas diesem Zeitrahmen nicht entsprechen, können die Schwerpunkte nach Absprache noch modifiziert werden.
- Erfahrungsgemäß ist es von Vorteil, ein Thema gemeinsam mit einem anderen Teilnehmer zu erarbeitet. Daher ist es in der Regel erfolgreicher, in einer Zweiergruppe zwei Themen zu bearbeiten. Auch wenn der Arbeitsaufwand größer ist, macht eine Gruppenarbeit üblicherweise mehr Spaß, was die Mehrarbeit ausgleichen kann.
- Die vorgeschlagenen Themen müssen nicht in der angegebenen Reihenfolge vorgetragen werden, und nicht alle aufgelisteten Themen müssen vergeben werden. Die Teilnehmer dürfen auch eigene Vorschläge machen, sofern diese rechtzeitig eingehen. Allerdings sollten die ersten vier Themen des Theorieteils zu Beginn des Seminars vorgetragen werden, da viele andere deren Inhalte verwenden.
- Wir empfehlen, den Vortrag an der Tafel zu halten. Vorträge mit Beamer sind allerdings ebenfalls möglich, müssen allerdings mit dem Betreuer abgesprochen werden.
- Schriftliche Ausarbeitungen der Themen sind nicht nötig. Allerdings erwarten wir, dass der Vortragende spätestens zwei Wochen vor seinem Termin mit dem Betreuer den Inhalt seiner Präsentation durchspricht, zu diesem Zeitpunkt also schon ausgearbeitete Notizen und ein gutes Verständnis zu seinem Vortrag zeigt. Wir empfehlen, schon deutlich früher (gleich nach der ersten Durchsicht des Materials) beim Betreuer vorbeizukommen, um den Schwerpunkt des Themas gemeinsam festzulegen. Zudem kann man natürlich bei Unklarheiten jederzeit vorbeikommen.
- Für die Vereinbarung von Gesprächsterminen ist grundsätzlich der Teilnehmer am Seminar selbst verantwortlich. Sollte ein Teilnehmer keine Gespräche mit dem Betreuen vereinbaren oder kein akzeptables Verständnis seines Themas zeigen, behalten wir uns vor, ihn vom Seminar auszuschließen und sein Thema zu streichen.

Themenvorschläge

Theorie der Differentialgleichungen

(1) *Stetige Abhängigkeit von den Daten und die Variationsgleichung:* [HSD04, §7 und §17]

Bekanntermaßen besitzt ein Anfangswertproblem der Form $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ bei einer hinreichend regulären Funktion für jede Wahl von t_0 und y_0 genau eine Lösung $y(t; t_0, y_0)$. In diesem Projekt soll untersucht werden, ob diese Lösung stabil unter Änderung von t_0 und y_0 ist. Es soll beispielsweise gezeigt werden, dass $(t, t_0, y_0) \mapsto y(t; t_0, y_0)$ eine stetige Funktion (in allen drei Variablen) ist.

Im Spezialfall $y'(t) = f(y(t))$ kann man bessere Resultate erzielen. In diesem Fall hängt die Lösung sogar differenzierbar von den Anfangsdaten ab. Die Ableitung bezüglich y_0 kann man überraschenderweise mit Hilfe der sogenannten Variationsgleichung sogar dann ausdrücken, wenn man nur die Lösung zum gegebenen Anfangswert kennt, nicht aber sämliche Lösungen der Gleichung, was ebenfalls präsentiert werden kann, falls die Zeit ausreicht.

(2) *Invariante Mengen:* [Ama83, §IV.16]

Hat man ein Modell aufgestellt, das beispielsweise die Entwicklung zweier Populationen y_1 und y_2 beschreiben soll (beispielsweise ein Räuber-Beute-Modell) so ist man sicherlich nur an nicht-negativen Lösungen interessiert. Man möchte also ausschließen, dass die Funktionen jemals negativ werden, wenn man mit positiven Anfangsdaten startet.

Wenn man zeigen will, dass die Lösung einer Gleichung $y'(t) = f(y(t))$ zu einem gegebenen Anfangswert global ist, also für alle Zeiten existiert, so genügt es bei gutartigem f, einen Blow-up der Lösung auszuschließen. Eine Strategie hierfür kann sein zu zeigen, dass eine Lösung, die in einer gewissen Kugel um den Anfangswert startet, diese Kugel nicht verlassen kann.

Beide oben genannten Beispiele lassen sich so ausdrücken, dass eine Lösung, die in einer gewissen abgeschlossenen, konvexen Menge startet, diese nicht verlassen kann. In einigen Situationen gibt es einfache Kriterien, mit denen man diese Bedingung prüfen kann, und diese sollen in diesem Projekt vorgestellt werden.

(3) *Gleichgewichtslösungen und Stabilität:* [HSD04, §8]

Hat man ein starres Pendel (also ein Gewicht, das mit einem Stab an einer Aufhängung befestigt ist), so hat dieses System offenbar zwei Gleichgewichtszustände: wenn das Gewicht genau über oder genau unter dem Pendel steht und sich in Ruhe befindet, so ist dies ein stationärer Zustand. Allerdings ist der eine Zustand offenbar instabil (lenkt man das Pendel auch nur minimal aus, so wird es nach unten kippen), während sich beim anderen Zustand bei kleinen Änderungen der Anfangsbedingungen auch das Langzeitverhalten nur geringfügig ändert.

Diese Untersuchung von Stabilität bezüglich kleinen Störungen der Anfangsbedingungen kann man häufig auf die Untersuchung einer linearisierten Version der Gleichung zurückführen, was in diesem Projekt dargestellt werden soll, wobei auch auf Grenzfälle eingegangen werden kann, in denen die Linearisierung noch keine Information über das eigentliche Problem liefert.

(4) *Gradientensysteme und Liapunov-Funktionen:* [HSD04, §9]

Wie im vorigen Thema soll die Stabilität von Gleichgewichtslösungen untersucht werden. In diesem Projekt wird allerdings statt der Linearisierung mit einer sogenannten *Liapunov-Funktion* (oder *Energie*) gearbeitet, die entlang von Lösungen fallend ist.

Ein Problem in Anwendungen ist nun allerdings, eine Liapunov-Funktion zu finden. Ein Spezialfall von Gleichungen, für die dies sehr einfach ist, sind Gradientensysteme, die noch weitere gute Eigenschaften haben.

In diesem Projekt sollen allgemeine Stabilitätsaussagen für Gleichungen mit Liapunov-Funktion dargestellt werden und insbesondere der Spezialfall von Gradientensystemen diskutiert werden.

(5) *Poincaré-Bendixson:* [HSD04, §10]

In den vorigen Projekten wurde untersucht, wann ein Gleichgewichtspunkt stabil ist, also wann Lösungen gegen einen Gleichgewichtspunkt konvergieren. Ein weiteres Phänomen, das bei beschränkten Lösungen autonomer Gleichungen stattdessen auftreten kann, ist Konvergenz gegen eine periodische Lösung wie beispielsweise beim (reibungsfreien) Pendel.

Im Allgemeinen können viele weitere Grenzverhalten auftreten, allerdings nicht in der Ebene, also bei Systemen in nur zwei Unbekannten. Dies ist die Aussage des Satzes von Poincaré und Bendixson, die in diesem Projekt vorgestellt werden soll.

(6) *Chaos:* [HSD04, §14]

In diesem Projekt soll eine kurze Einführung chaotisches Verhalten von Differentialgleichungen gegeben werden. Es bietet sich an, dies an einer einzelnen Gleichung zu diskutieren, beispielsweise an der Lorenz-Gleichung. Insofern ist dieses Thema nicht ganz klar der Theorie zuzuordnen, sondern kann auch als Anwendung angesehen werden.

Anwendungen

(7) Gleichungen bei Schaltkreisen: [HSD04, §12]

(8) Gleichungen der klassischen Mechanik: [HSD04, §13]

(9) Gleichungen aus der Biologie (jeder Unterpunkt bietet Material für ein eigenständiges Thema): [PSZ08]

- Populationen
- Infektionen
- Viren und Prionen

- Paarbildung
- Genetik
- Enzyme

(10) Themen aus dem Buch von Braun nach Wahl: [Bra94]

Literatur

[Ama83] Herbert Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Walter de Gruyter & Co., 1983.

[Bra94] Martin Braun. *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen.* Springer-Verlag, 1994.

[HSD04] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.

[PSZ08] Jan W. Prüß, Roland Schnaubelt, and Rico Zacher. *Mathematische Modelle in der Biologie.* Birkhäuser, 2008.