Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 4

It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience.

Albert Einstein (1879–1955).

Everything should be made as simple as possible, but no simpler.

11. *Moore–Penrose Pseudoinverse.* (14)

(a) Gegeben sei das unlösbare lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit (3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Moore–Penrose Pseudoinverse A^+ und bestimme damit die optimale Lösung x^+.

(b) Sei $Z \in \mathbb{C}^{m\times n}$ die Nullmatrix. Bestimme Z^+. (1)

(c) Gilt wenigstens für quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dass $(AB)^+ = B^+A^+$? (3)

(d) Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Beweise folgende Rechenregeln. (3)

$$(A^+)^+ = A, \quad \overline{(A^+)}^{\mathrm{T}} = (\overline{A}^{\mathrm{T}})^+, \quad (\lambda A)^+ = \frac{1}{\lambda}A^+, \quad \overline{A}^{\mathrm{T}}AA^+ = \overline{A}^{\mathrm{T}}$$

(e) Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Zeige, dass AA^+ die orthogonale Projektion auf Bild(A) in $\mathbb{C}^m$ und $(I - A^+A)$ die orthogonale Projektion auf Kern(A) in $\mathbb{C}^n$ angibt. (4)

12. *Normierte Räume.* Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ eine *Norm* genannt wird, wenn sie folgenden Axiomen genügt. (8+4*)

(N1) $\forall x \in V : \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positivität und Definitheit)

(N2) $\forall x \in V\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ (Homogenität)

(N3) $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt dann *normierter Raum*. Es ist bereits bekannt, dass

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\overline{x}^{\mathrm{T}}x}$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist.

(a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeige die *Dreiecksungleichung nach unten* (2)

$$\forall x, y \in V : \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|.$$

(b) Zeige, dass auch (3)

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

und

$$\|x\|_\infty := \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |x_j|$$

Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind. Beweise für $x \in \mathbb{K}^n$ zudem die Ungleichungskette

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty \le n\|x\|_1 \le n\sqrt{n}\|x\|_2.$$

(c) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Sei (x_k) eine Folge in V und $x \in V$. Wir sagen die Folge (x_k) *konvergiert gegen den Grenzwert x bezüglich* $\|\cdot\|$, falls (3)

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Zeige, dass eine Folge in $(V, \|\cdot\|)$ höchstens gegen einen Grenzwert bezüglich $\|\cdot\|$ konvergiert. Zeige, dass eine Folge in $\mathbb{K}^n$ genau dann gegen einen Grenzwert x bezüglich $\|\cdot\|_2$ konvergiert, wenn sie gegen x bezüglich $\|\cdot\|_1$ (bzw. $\|\cdot\|_\infty$) konvergiert.

(d)* Mit $V := C([0,1]; \mathbb{K})$ bezeichnen wir den Vektorraum der stetigen Funktionen von $[0,1] \to \mathbb{K}$. Wir definieren die Abbildungen (4*)

$$\|\cdot\|_2 \colon V \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_2 := \Big(\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\|\cdot\|_\infty \colon V \to \mathbb{R}, \quad \|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Weise nach, dass diese Abbildungen wohldefiniert sind und Normen auf V darstellen. Zeige, dass zwar

$$\forall f \in V : \|f\|_2 \le \|f\|_\infty,$$

aber dass es keine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\forall f \in V : \|f\|_\infty \le C\|f\|_2.$$

13. *Spectral mapping theorem für Polynome in endlicher Dimension.* Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei $T \in L(V)$ ein Endomorphismus. Sei $p \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom. Wir definieren analog zu einer vorausgegangenen Übungsaufgabe das *Spektrum* von T als (10)

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (T - \lambda I) \text{ nicht invertierbar}\}.$$

(a) Zeige, dass (5)

$$\sigma\big(p(T)\big) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\} =: p\big(\sigma(T)\big).$$

(b) Sei T zusätzlich selbstadjungiert, d.h. $T = T^{\mathrm{ad}}$. Zeige, dass $p(T)^{\mathrm{ad}} = \overline{p}(T)$ wobei $\overline{p}$ das Polynom p mit konjugiert komplexen Koeffizienten ist. (3)

(c) Sei T zusätzlich selbstadjungiert. Zeige, dass $p(T)$ normal ist. (2)

14. *Polarzerlegung invertierbarer Matrizen.* Wir zeigen, dass die Polarzerlegung invertierbarer Matrizen eindeutig ist. (8+4*)

(a) Sei $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär und ähnlich zu einer positiv definiten Matrix. Zeige: $M = I$. (3)

(b) Zeige: Eine positiv definite Matrix $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat eine positiv definite Wurzel. (2)

(c)* Zeige: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, dann ist die Polarzerlegung $A = UH$ eindeutig, wobei U unitär und H positiv definit ist. (4*)

(d) Zeige: Eine positiv definite Matrix $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat eine eindeutig bestimmte positiv definite Wurzel. (3)

15. *Hauptkomponentenanalyse.* Es seien Datenvektoren $x_1, \dots, x_N$ in $\mathbb{C}^n$ gegeben. Wir suchen einen Unterraum V der Dimension höchstens $d \ll n$ von $\mathbb{C}^n$, so dass mit der orthogonalen Projektion P_V der quadratische Fehler (14+4*)

$$E(V) := \sum_{k=1}^{N} \|x_k - P_V x_k\|^2$$

minimal wird unter allen höchstens d-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{C}^n$.

Wenn wir für gegebenes $d \in \mathbb{N}$ so einen Unterraum V finden, können wir in gewisser Weise optimal die Dimension der Daten reduzieren, indem wir die Datenvektoren orthogonal auf V projizieren und bezüglich einer Basis von V als nun d-dimensionale Datenvektoren auffassen. Dies wird beispielsweise in der Statistik eingesetzt.

Sei nun V ein fixierter d-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{C}^n$ mit einer Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_d)$. Wir bezeichnen die orthogonale Projektion in $\mathbb{C}^n$ auf V durch P_V und definieren die Matrix $U := (u_1, \dots, u_d)$.

(a) Beweise, dass $\operatorname{Spur}(P_V) = d$ und dass P_V positiv semidefinit ist. (3)

(b) Wir definieren die Matrix A in $\mathbb{C}^{n\times n}$ durch (2)

$$A := \sum_{k=1}^{N} x_k \overline{x}_k^{\mathrm{T}}.$$

Zeige, A ist positiv semidefinit und hat deshalb Eigenwerte $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

(c)* Sei $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\operatorname{Spur}(M) = d$ und $0 \leq m_{jj} \leq 1$. Sei $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Zeige (4*)

$$\operatorname{Spur}(MD) \leq \sum_{j=1}^{d} \lambda_j.$$

(d) Zeige (4)

$$E(V) = \operatorname{Spur}(A) - \operatorname{Spur}(\overline{U}^{\mathrm{T}} A U).$$

(e) Zeige (3)

$$E(V) \geq \sum_{j=d+1}^{n} \lambda_j.$$

(f) Sei $S = (s_1, \dots, s_n)$ unitär mit $S^{-1}AS = D$, und wähle $V := \mathcal{L}(s_1, \dots, s_d)$. Zeige (2)

$$E(V) = \sum_{j=d+1}^{n} \lambda_j =: E(d).$$

16.* *Maple-Aufgabe.* Wir haben experimentell durch Meßfehler gestörte Vektoren $x_1, \dots, x_{100}$ aus $\mathbb{R}^{20}$ erhalten. Wir wissen, dass die ungestörten Vektoren einen Unterraum von $\mathbb{R}^{20}$ aufspannen, dessen "wirkliche" Dimension uns interessiert. Bestimme mit Hilfe von Maple für $d = 0, \dots, 20$ die Werte $E(d)$ aus Aufgabe 15 und schätze damit die wirkliche Dimension. Ein Maple-Worksheet mit den Testdaten befindet sich auf der Veranstaltungsseite. (6*)