Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 19

UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Donnerstag, 28.05.09

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 4

"Although I am almost illiterate mathematically, I grasped very early in life that any one who can count to ten can count upward indefinitely if he is fool enough to do so."

— Robertson Davis (1913–1995)

10. *Schwache Konvergenz im Hilbertraum.* (7)

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Hilbertraum H. Wir sagen (x_k) konvergiert schwach gegen x, wenn

$$(x_k \,|\, y) \to (x \,|\, y) \qquad \forall y \in H.$$

Man schreibt dann auch $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$.

(a) Zeige, dass der schwache Grenzwert eindeutig ist. (1)

(b) Zeige, dass schwach konvergente Folgen beschränkt sind. (2)

(c) Zeige, dass eine Folge (x_k) genau dann stark gegen x konvergiert, wenn sie schwach gegen x konvergiert und $\limsup_{k\to\infty} \|x_k\| \le \|x\|$ erfüllt. (2)

(d) Seien (y_k) und (x_k) Folgen in H. Es gelte $y_k \to y$ und $x_k \rightharpoonup x$. Zeige, dass dann auch $(x_k \,|\, y_k) \to (x \,|\, y)$ gilt. (1)

(e) Zeige, dass es in ℓ^2 beschränkte Folgen ohne konvergente Teilfolge und schwach konvergente aber nicht konvergente Folgen gibt. (1)

11. *Orthogonalität.* (6)

Sei H ein Hilbertraum und $U \subset H$ ein nichtleerer, abgeschlossener Unterraum. Die orthogonale Projektion auf U in H sei mit P_U bezeichnet.

(a) Es gilt $\operatorname{rg} P_U \perp \ker P_U$ und $H = \operatorname{rg} P_U \oplus \ker P_U$. (2)

(b) Es sei $P \in \mathcal{L}(H)$ mit $P^2 = P$ und $\operatorname{rg} P = U$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: $P = P_U$, $(Px \,|\, y) = (x \,|\, Py)$ für alle $x, y \in H$, $\|P\| \le 1$. (4)

12. *Hahn–Banach im Hilbertraum.* (6)

(a) Sei H ein Hilbertraum. Sei U ein abgeschlossener Unterraum von H und $x_0 \in H\backslash U$. Zeige, dass es $\varphi \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C})$ gibt, mit $\varphi|_U = 0$ und $\varphi(x_0) = 1$. (2)

(b) Sei $A \subset H$ abgeschlossen und $B \subset H$ kompakt. Zeige: $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ ist abgeschlossen. Zeige zudem, dass $A - B$ konvex ist, falls A und B konvex sind. (2)

Hinweis: Wir definieren Kompaktheit über Folgenkompaktheit, d.h. für einen metrischen Raum (X, d) ist $K \subset X$ nach Definition genau dann kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K besitzt.

(c) Seien A und B nichtleere, disjunkte, abgeschlossene und konvexe Teilmengen von H. Zudem sei B kompakt. Zeige: Es gibt $x^* \in H$ und $\varepsilon > 0$ so, dass (2)

$$(x^* \,|\, a) + \varepsilon \le (x^* \,|\, b) \qquad \forall a \in A, b \in B.$$