Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 28.05.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 10+4⋆

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 5

"I hail a semi-group when I see one and I seem to see them everywhere! Friends have observed, however, that there are mathematical objects which are not semi-groups."

— Einar Hille (1894–1980)

13. *Orthogonalität, Orthonormalsysteme und -basen.* (10)

(a) Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ nichtleer. Zeige: $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{span} M}$. (3)

(b) Sei H ein Hilbertraum und (e_k) ein Orthonormalsystem in H. Zeige, dass (e_k) genau dann eine Orthonormalbasis von H ist, wenn (2)

$$\{x \in H : (x \,|\, e_k) = 0 \quad \forall k\} = \{0\}.$$

(c) Zeige, dass die Rademacher-Funktionen $r_n(t) := \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ein Orthonormalsystem aber keine Orthonormalbasis in $L^2(0,1)$ sind. (2)

(d) Setze (3)

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und definiere für $j \in \mathbb{N}_0$ und $k = 0, \ldots, 2^j - 1$ die Funktionen

$$\psi_{j,k}(t) := 2^{j/2} \psi(2^j t - k).$$

Zeige, dass die konstante Funktion $\mathbf{1}$ zusammen mit den Funktionen $\psi_{j,k}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(0,1)$ bilden.
Hinweis: Definiere $F(t) := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ für ein $f \in L^2(0,1)$, welches orthogonal zu all diesen Funktionen ist. Was läßt sich nun beispielsweise über $F(\frac{1}{2})$ sagen?

14.⋆ Sei $H = L^2(0,1)$. Gibt es eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \to H$ mit folgenden Eigenschaften? (4⋆)

(i) $\gamma(0) = 0$ und $\|\gamma(1)\| = 1$;

(ii) $(\gamma(b) - \gamma(a)) \perp (\gamma(d) - \gamma(c))$ falls $0 \le a < b \le c < d \le 1$;

(iii) $\overline{\operatorname{span} \gamma([0,1])} = H$.