Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 18.06.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 30+10⋆

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 6

"As for everything else, so for a mathematical theory: beauty can be perceived but not explained."

— Arthur Cayley (1821–1895)

15. Sei H ein Hilbertraum und U, V abgeschlossene Unterräume von H. Zeige: Genau dann kommutieren P_U und P_V, wenn auch $P_U P_V$ eine orthogonale Projektion ist; in diesem Fall gilt $P_U P_V = P_V P_U = P_{U\cap V}$. (4)

16. *Fourierreihen.* (12)

(a) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ 1-periodisch. Zeige: Ist die formale Fourierreihe von f durch $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi ikt}$ gegeben, dann hat f' die formale Fourierreihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi ikc_k e^{2\pi ikt}$. (2)

(b) Berechne die formale Fourierreihe der Funktion $f(t) = \frac{1}{4}\pi^2(1-2t)^2$! (4)

(c) Wir nehmen in diesem Aufgabenteil an, dass wir bereits wüßten, dass die formale Fourierreihe aus Aufgabenteil (b) gleichmäßig gegen f konvergiert. Weise damit die Gleichheit (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

nach!

(d) Man will für das Polynom $p(t) = t^{11}$ ein Polynom q höchstens fünften Grades finden, welches den Ausdruck (4)

$$\int_0^1 \left|p(t) - q(t) - 2e^t\right|^2 \mathrm{d}t$$

minimiert. Ist dieses Optimierungsproblem wohlgestellt und eindeutig lösbar? Falls ja, beschreibe ein Verfahren, welches die Lösung q bestimmt.

17. *Der Vollständigkeit halber...* (6)

(a) Beweise ohne Zuhilfenahme der Maßtheorie die Vollständigkeit von ℓ^2. (4)

(b) Zeige, dass ℓ^∞ nicht separabel ist. (2)

18. Sei H ein Hilbertraum und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in H. (4)

(a) Zeige, dass (e_k) genau dann eine Orthonormalbasis von H ist, wenn jeder Untervektorraum von H, welcher (e_k) enthält, dicht in H ist. (2)

(b) Zeige, dass (e_k) genau dann eine Orthonormalbasis von H ist, wenn (2)

$$(x \mid y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x \mid e_k)(e_k \mid y)$$

für alle $x, y \in H$ gilt.

19. *Zur Hilbertraumdimension.* (10)

(a) Seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ zwei isomorphe normierte Räume. Zeige, dass X_1 genau dann separabel/vollständig ist, wenn X_2 separabel/vollständig ist. Ein normierter Raum heißt dabei *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. (2)

(b) Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Aussage: Sind zwei normierte Räume isometrisch isomorph, so ist der eine ein Hilbertraum genau dann, wenn es auch der andere ist. (1)

(c) Zeige, dass die Vektorraumdimension von ℓ^2 nicht mit seiner Hilbertraumdimension übereinstimmt. (3)

(d) Zeige, dass zwei Hilberträume mit Orthonormalbasen derselben Kardinalität stets isometrisch isomorph sind. (4)

(e) Gilt die Aussage des vorigen Aufgabenteils auch, wenn man „Orthonormalbasen“ durch „Vektorraumbasen“ ersetzt und dafür das „isometrisch“ streicht?

Hinweis: Wir verwenden ZFC. Auf diesen Aufgabenteil werden keine Punkte vergeben, weil er unangemessen schwierig und im Rahmen der Vorlesung völlig irrelevant ist. Die vorgesehene Bearbeitung besteht in entsprechender Literaturrecherche.

20. Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum. Mit $C(K)$ sei die Menge der stetigen Funktionen von K nach $\mathbb{R}$ bezeichnet. Es sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen in $C(K)$ gegeben, welche $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zudem gelte, dass f_n punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiere. Zeige, dass $f_n \to f$ gleichmäßig in K für $n \to \infty$. (4)

Hinweis: Der Konsequenz halber ist auch bei dieser Aufgabe wieder Folgenkompaktheit zu verwenden.