Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 02.07.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16+4⋆

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 8

The study of mathematics is apt to commence in disappointment.

— Alfred North Whitehead (1861–1947)

24. *Zum Satz von Stone–Weierstraß.* (5)

(a) Sei $a < b$. Zeige, dass die geraden Polynome genau dann dicht in $C[a,b]$ liegen, wenn $0 \notin (a,b)$. (2)

(b) Sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Eine Funktion $p \in C(\mathbb{T})$ heißt trigonometrisches Polynom, falls (1)

$$p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = -n, \dots, n$. Zeige, dass die trigonometrischen Polynome dicht in $C(\mathbb{T})$ sind.

(c) Sei $f \in C_{\text{per}}[0,1]$. Zeige, dass f gleichmäßig durch Funktionen der Form (2)

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{2\pi i k t}$$

approximiert werden kann, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = -n, \dots, n$. Warum widerspricht dies nicht Proposition 4.31?

25. *Cesàro-Mittel und Fourierreihen.* (7)

(a) Eine Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ heißt Cesàro-summierbar, wenn die Cesàro-Mittel (2)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

für $n \to \infty$ konvergieren. Zeige, dass die Cesàro-Mittel einer konvergenten Folge gegen den Grenzwert der Folge konvergieren. Damit sind also konvergente Folgen Cesàro-summierbar. Zeige, dass die umgekehrte Richung nicht gilt.

(b) Sei $f \in C_{\text{per}}[0,1]$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Definiere (4)

$$\sigma_n(f)(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (S_k f)(t).$$

Zeige, dass $\sigma_n(f)$ gleichmäßig gegen f konvergiert für $n \to \infty$. Gib zudem eine Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit an, also eine Abschätzung von $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty$ nach oben durch eine Nullfolge in n.

(c) Sei f wie im vorigen Aufgabenteil. Zeige, wenn die Fourierreihe von f an einer Stelle t konvergiert, dann konvergiert sie dort gegen den Wert $f(t)$. (1)

26. Sei (x_k) eine Folge in einem Hilbertraum H. Zeige, dass (x_k) genau dann schwach konvergiert, wenn $\lim_{k\to\infty}(x_k \mid y)$ für jedes $y \in H$ existiert. (4)

27.$\star$ Zeige, dass ℓ^1 sowohl als Dualraum von $\mathbf{c}$ als auch von $\mathbf{c}_0$ aufgefasst werden kann. Hierbei bezeichnet $\mathbf{c}$ den Raum der konvergenten Folgen und $\mathbf{c}_0$ den Raum der Nullfolgen, die wie üblich beide mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen sind. (4$\star$)

Anmerkung: Es ist eine Konsequenz aus dem Satz von Hahn–Banach, dass separable Dualräume einen separablen Prädual haben. Damit ist ℓ^1 nicht der Dualraum von ℓ^∞.