Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 16.07.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16+4⋆

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 10

> Ob ich die Mathematik auf ein Paar Dreckklumpen anwende, die wir Planeten nennen, oder auf rein arithmetische Probleme, es bleibt sich gleich, die letztern haben nur noch einen höhern Reiz für mich.
>
> — Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

30. *Zum Satz von Arzelà–Ascoli.* (10+4⋆)

(a) Sei (M, d) ein kompakter metrischer Raum. Zeige, dass M separabel ist. (3)

(b) Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $M \subset C(K)$. Zeige, dass M genau dann gleichmäßig gleichgradig stetig ist, wenn es gleichgradig stetig ist. Dabei heisst M gleichgradig stetig, wenn (3)

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in K\ \exists \delta > 0 : \forall f \in M\ \forall y \in K\ (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

(c) Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Zeige, dass das Theorem von Arzelà–Ascoli sogar eine Charakterisierung präkompakter Teilmengen von $C(K)$ ist. (4)

(d)⋆ Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes offenes Intervall. Zeige, dass die Einheitskugel von $H^1(I)$ aufgefasst als Teilmenge von $C(\overline{I})$ präkompakt ist. (4⋆)

Hinweis: Verwende die Beschreibung des stetigen Repräsentanten vom letzten Übungsblatt und wende die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung an, um die Voraussetzungen von Arzelà–Ascoli zu überprüfen.

31. *Zum Diagonalfolgenargument.* (6)

Zeige, dass jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

Hinweis: Bolzano–Weierstraß, der Kontext dieser Aufgabe, Riesz–Fréchet und eine anfängliche Betrachtung lediglich separabler Hilberträume sollten hilfreich sein.