Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 23.07.09

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
Manfred Sauter
Sommersemester 2009
Gesamtpunktzahl: 16+8⋆

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 11

The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering principle obviously false, and who can tell about Zorn's Lemma?

— Jerry Lloyd Bona

32. *Multiplikationsoperatoren auf ℓ^2.* (8)
Sei $m \in \ell^\infty$. Definiere die Abbildung

$$M_m \colon (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (m_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

(a) Zeige, dass M_m einen beschränkten linearen Operator auf ℓ^2 definiert. (1)

(b) Zeige, dass M_m genau dann ein kompakter Operator auf ℓ^2 ist, wenn $m \in \mathbf{c}_0$ gilt. (3)

(c) Zeige, dass $\sigma_\mathrm{p}(M_m) = \{m_k : k \in \mathbb{N}\}$ und $\sigma(M_m) = \overline{\sigma_\mathrm{p}(M_m)}$ gilt. (3)

(d) Zeige, dass jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ das Spektrum eines beschränkten linearen Operators auf dem Hilbertraum ℓ^2 sein kann. (1)

33. *Beispiele kompakter Operatoren.* (6)

(a) Sei V der Volterraoperator auf $C[0,1]$, also (3)

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Zeige, dass V kompakt ist, $\sigma_\mathrm{p}(V) = \emptyset$ und $\sigma(V) = \{0\}$.

(b) Sei $k \in L^2\big((0,1)\times(0,1)\big)$ und definiere (3)

$$(F_k f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

für $f \in L^2(0,1)$. Zeige, dass F_k ein kompakter Operator auf $L^2(0,1)$ ist.

34. Seien H und K Hilberträume. (2+4⋆)

(a) Ein linearer Operator $T \colon H \to K$ heißt *vollstetig*, wenn er schwach konvergente Folgen auf entsprechend konvergente Folgen abbildet, also wenn $Tx_k \to Tx$ gilt, falls $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$. Zeige, dass ein linearer Operator $T \colon H \to K$ genau dann vollstetig ist, wenn er kompakt ist. (3)

(b) Zeige, dass $T \in \mathcal{L}(H,K)$ genau dann kompakt ist, wenn T^* kompakt ist. (3)

Hinweis: Man kann Arzelà–Ascoli auf die Familie $\{(\cdot\,|\,y) : y \in \overline{TB_H(0,1)}\}$ anwenden. Es gibt aber auch einen deutlich elementareren auf Hilbertraumeigenschaften beruhenden Beweis.

Axiom (Auswahlaxiom)**.** *Sei J eine nichtleere Indexmenge und seien M_j für $j \in J$ nichtleer. Dann ist das kartesische Produkt der M_j über $j \in J$ nichtleer, also*

$$\Big\{ f \colon J \to \bigcup_{j \in J} M_j : f(j) \in M_j \text{ für alle } j \in J \Big\} \neq \emptyset.$$

Definition 1 (Einige Begrifflichkeiten zu partiellen Ordnungen)**.** *Eine Menge M mit einer binären Relation $\preceq \subset M \times M$ ist* partiell geordnet*, wenn $\preceq$ reflexiv ($a \preceq a$), antisymmetrisch ($a \preceq b$ und $b \preceq a$ impliziert $a = b$) und transitiv ($a \preceq b$ und $b \preceq c$ impliziert $a \preceq c$) ist. Sei nun $(M, \preceq)$ eine partiell geordnete Menge. Eine Teilmenge $C \subset M$ heißt* Kette *oder* total geordnet*, wenn für zwei beliebige Elemente $a, b \in C$ zumindest eine der Relationen $a \preceq b$ oder $b \preceq a$ gilt. Ein Element $m \in M$ heißt* maximales Element*, wenn aus $m \preceq a$ stets $m = a$ folgt. Ein Element $s \in M$ heißt* obere Schranke *für $C \subset M$, wenn $c \preceq s$ für alle $c \in C$ gilt.*

Theorem 2 (Lemma von Zorn)**.** *Sei $(M, \preceq)$ eine partiell geordnete Menge. Wenn jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke besitzt, dann existiert ein maximales Element in M.*

35.$\star$ *Zum Lemma von Zorn* (4$\star$)

(a)$\star$ Mit Hilfe des Lemmas von Zorn kann man beweisen, dass jeder Vektorraum eine Hamelbasis besitzt. Studiere dazu beispielsweise den Beweis auf `http://planetmath.org/encyclopedia/ZornsLemmaAndBasesForVectorSpaces.html`.

(b)$\star$ Seien A und B zwei Mengen. Zeige mit Hilfe des Lemmas von Zorn, dass es eine injektive Abbildung von A nach B geben muss, falls es keine injektive Abbildung von B nach A gibt. (4$\star$)

(c)$\star$ Eine Frage zur Diskussion über den Zusammenhang von Induktion und dem Lemma von Zorn: Ist es gerechtfertigt, das Lemma von Zorn als bequemes Instrument zur Induktion bis in die Überabzählbarkeit zu bezeichnen?

Theorem 3 (Cantor–Bernstein–Schroeder)**.** *Seien A und B zwei Mengen derart, dass sowohl eine injektive Abbildung von A nach B als auch von B nach A existiert. Dann gibt es eine Bijektion zwischen A und B.*

Zusammen mit der vorausgegangenen Aufgabe ergibt sich nun, dass eine totale Ordnung auf den Kardinalitäten von Mengen existiert. Es gibt dazu einen recht kurzen und raffinierten Beweis, der auf `http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor-Bernstein-Schroeder_theorem` unter “Another proof” skizziert ist.

— So long, and thanks for all the fish.