Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 10.07.14
Gesamtpunktzahl: 22

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 11

> If I were to awaken after having slept for a thousand years, my first question would be: Has the Riemann hypothesis been proven?
>
> — David Hilbert (1862–1943)

1. (a) Sei $\Omega = (-1,1)^{d-1} \times \mathbb{R}$ mit $d \geq 1$. Sei $1 < p < \infty$. Zeige, dass $W_0^{1,p}(\Omega)$ nicht kompakt in $L^p(\Omega)$ eingebettet ist. (2)
Hinweis: Konstruiere eine geeignete Folge (u_n) in $\mathcal{D}(\Omega)$, welche schwach in $W^{1,p}(\Omega)$ konvergiert, aber nicht stark in $L^p(\Omega)$.

(b) Zeige, dass $C^1[0,1] \overset{c}{\hookrightarrow} C[0,1]$. (1)
Hinweis: Arzela–Ascoli

(c) Seien X, Y, Z Banachräume mit $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y \hookrightarrow Z$. Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existiert mit $\|x\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X + C_\varepsilon\|x\|_Z$ für alle $x \in X$. (3)
Hinweis: Widerspruchsbeweis mit Renormierung, ähnlich wie bei Poincaré-Ungleichung.

(d) Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existiert mit $\|u\|_\infty \leq \varepsilon\|u'\|_\infty + C_\varepsilon\|u\|_{L^1(0,1)}$ für alle $u \in C^1[0,1]$. (1)

(e) Zeige, dass $W^{m,p}(0,1) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m-1}[0,1]$ für $1 < p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Bekommt man auch für $p = 1$ eine kompakte Einbettung? (3)

(f) Sei $1 < p \leq \infty$. Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existiert mit (1)

$$\|u'\|_{L^\infty(0,1)} + \|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \varepsilon\|u''\|_{L^p(0,1)} + C_\varepsilon\|u\|_{L^1(0,1)}$$

für alle $u \in W^{2,p}(0,1)$.

2. *Soboleväume auf dem Halbraum.*

(a) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ für $|h| \to 0$. (2)
Hinweis: Betrachte beispielsweise zuerst $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Ab nun sei $p = 2$ und $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times (0,\infty)$.

(b) Zeige, dass $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Omega)$ dicht in $H^1(\Omega)$ ist. (3)
Hinweis: Approximiere $u \in H^1(\Omega)$ durch $\tau_h u$ mit $h = \varepsilon e_d$ für $\varepsilon \to 0+$. Nun verwende Faltung um $\tau_h u$ auf Ω mit Funktionen in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ zu approximieren.

(c) Definiere $E\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ durch (3)

$$(Eu)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x_d \geq 0, \\ -3u(x_1,\ldots,x_{d-1},-x_d) + 4u(x_1,\ldots,x_{d-1},-x_d/2) & \text{für } x_d < 0. \end{cases}$$

Sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Omega)$. Zeige, dass $Eu \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Zeige dann, dass $\|Eu\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ mit einem $C > 0$, welches unabhängig von u ist. Folgere, dass E stetig zu einem Fortsetzungsoperator für $H^1(\Omega)$ fortgesetzt werden kann.

(d) Zeige, dass es ein $C > 0$ gibt mit $\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Omega)$. Folgere, dass $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ gegeben durch $Tu = u|_{\partial\Omega}$ wohldefiniert und stetig fortsetzbar zu einem Operator auf $H^1(\Omega)$ ist. Diese Fortsetzung wird *Spuroperator* für $H_1(\Omega)$ genannt. (3)
Hinweis: Das Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$ ist das $(d-1)$-dimensionale Lebesguemaß. Verwende den Hauptsatz, um $|u(x',0)|^2$ darzustellen. Die Abschätzung folgt dann mit Fubini und Cauchy–Schwarz.

`http://spikedmath.com/198.html`