Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Sommersemester 2014

Besprechung: Donnerstag, 17.07.14
Gesamtpunktzahl: 18

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 12

Profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries.

— Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $a_{kl}, b_k, c_k, c_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit (a_{kl}) strikt elliptisch $(k, l = 1, \dots, d)$ und $V = H_0^1(\Omega)$ oder $V = H^1(\Omega)$. Definiere $\mathfrak{a}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ durch (5)

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^d a_{kl} D_k u D_l v + \int_\Omega \sum_{k=1}^d b_k u D_k v + \int_\Omega \sum_{k=1}^d c_k (D_k u) v + \int_\Omega c_0 uv.$$

Zeige, dass es ein $\omega > 0$ gibt, so dass $\mathfrak{b}(u,v) := \mathfrak{a}(u,v) + \omega (u \,|\, v)_{L^2(\Omega)}$ eine koerzive stetige Bilinearform ist.
Hinweis: Benutze die Young'sche Ungleichung für Produkte, also dass $2ab \le \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zudem sei $u \in H^1(\Omega)$ und $a \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $a(x) \ge \mu$ für alle $x \in \Omega$ für ein $\mu > 0$. Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Zeige, wenn $a^{-1/2} \operatorname{div}(a \nabla (a^{-1/2} u)) = f$, dann gibt es ein $q \in C(\overline{\Omega})$ so dass $\Delta u - qu = f$. (5)
Hinweis: Die Gleichungen sind natürlich im schwachen Sinn zu verstehen. Es kann hilfreich sein, zuerst einmal $u \in C^2(\overline{\Omega})$ anzunehmen.

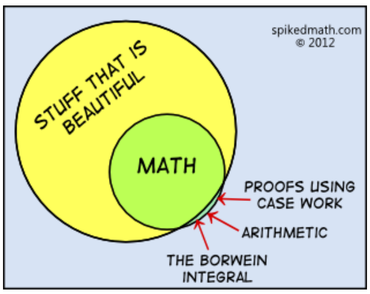
3. Sei $\Omega = (a,b)$ ein beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$.

(a) Seien $u, v \in H^1(\Omega)$. Zeige, dass $\int_a^b u'v = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'$. (2)

(b) Es seien $\alpha, \beta \ge 0$ mit $\alpha + \beta > 0$. Für $\lambda \ge 0$ betrachte das Problem (6)

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = f & \text{in } \Omega, \\ u'(a) = \alpha u(a) & \text{und} \\ u'(b) = -\beta u(b). \end{cases}$$

Zeige, für alle $\lambda \ge 0$ und $f \in L^2(\Omega)$ hat dieses Problem eine eindeutige Lösung in $H^2(\Omega)$.
Hinweis: Definiere mit Hilfe des vorausgegangenen Aufgabenteils eine stetige koerzive Bilinearform auf $H^1(\Omega)$ derart, dass Lax–Milgram eine eindeutige Lösung in $H^1(\Omega)$ garantiert. Argumentiere dann, weshalb $u \in H^2(\Omega)$.



http://spikedmath.com/499.html