Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Besprechung: Donnerstag, 29.05.14
Gesamtpunktzahl: 22

# Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 5

It is easier to square the circle than to get round a mathematician.

— Augustus De Morgan (1806–1871)

**1.** *Über subharmonische Funktionen.* (12)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

(a) Zeige, dass $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ subharmonisch auf $\Omega$ ist, falls $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ und $u_1, u_2$ subharmonisch auf $\Omega$ sind. Die subharmonischen Funktionen bilden also einen konvexen Kegel. (2)

(b) Zeige, dass $u \in C(\Omega)$ genau dann subharmonisch ist, wenn (2)

$$u(x) \leq \frac{1}{\sigma_d r} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|z - x|^d} u(z) \, \mathrm{d}\sigma(z)$$

für alle $x \in B(x_0, r) \Subset \Omega$.

(c) Zeige, dass $u \in C(\Omega)$ genau dann subharmonisch ist, wenn (2)

$$u(x_0) \leq \fint_{B(x_0,r)} u(y) \, \mathrm{d}y$$

für alle $B(x_0, r) \Subset \Omega$.

(d) Zeige, dass $u \in C^2(\Omega)$ genau dann subharmonisch ist, wenn $-\Delta u \leq 0$ auf $\Omega$ gilt. (2)

(e) Zeige, dass $u \in C(\Omega)$ genau dann subharmonisch ist, wenn es **schwach subharmonisch** ist, d.h. wenn $-\int_\Omega u \Delta\varphi \leq 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$. (4)

**2.** *Zur Poissionformel und der Harnackungleichung.* (4)

(a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $B(0, r) \Subset \Omega$ und $d \geq 2$. Zudem sei $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ positiv. Zeige, dass dann (2)

$$r^{d-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{d-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{d-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{d-1}} u(0)$$

für alle $x \in B(0, r)$.

(b) Es sei $d = 2$ und $u \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ derart, dass $0 \leq u(z) \leq 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Zeige, dass dann (2)

$$\sup_{|x| \leq 1/5} \frac{u(x)}{2} \leq \inf_{|x| \leq 1/7} u(x).$$

**3.** *Möbiustransformation und harmonische Funktionen.* (6)

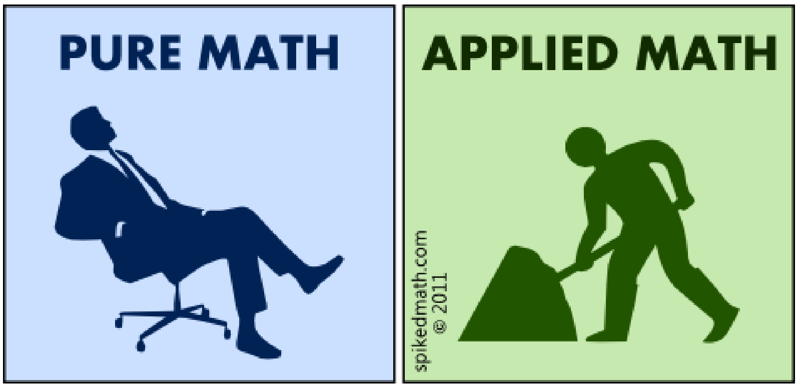
(a) Betrachte die Möbiustransformation $f\colon z \mapsto \frac{z+i}{iz+1}$. Zeige, dass $f$ die offene komplexe Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ biholomorph auf die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z = x+iy : x, y \in \mathbb{R} \text{ und } y > 0\}$ abbildet. Was macht $f$ auf dem Einheitskreis? (2)

(b) Gib eine Abbildung an, welche $\mathbb{D}$ biholomorph auf den Sektor $\{z = x+iy : 0 < y < x\}$ abbildet. (1)

(c) Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für folgende Aussage: Das Problem (3)

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{H}) \cap C(\overline{\mathbb{H}} \setminus \{0\}), \\ u \geq 0 \quad \text{auf } \mathbb{H}, \\ \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{H}, \\ u(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

hat nur die triviale Lösung.




http://spikedmath.com/446.html