Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 12.06.14
Gesamtpunktzahl: 18

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 7

A mathematician's reputation rests on the number of bad proofs he has given.

— Abram Samoilovitch Besicovitch (1891–1970)

1. *Zur Inversion und der Kelvintransformation.* (12)

(a) Zeige, dass die Inversion I die Familie der Sphären und Hyperebenen in $\mathbb{R}^d$ erhält. Hierbei setzen wir $I(0) = \infty$ und $I(\infty) = 0$, und verstehen den Punkt im Unendlichen als zugehörig zu jeder Hyperebene. (3)
Hinweis: Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann eine (nichtdegenerierte) Sphäre oder Hyperebene, wenn

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d : a|x|^2 + b \cdot x + c = 0\},$$

wobei $b \in \mathbb{R}^d$ und $a, c \in \mathbb{R}$ mit $|b|^2 - 4ac > 0$.

(b) Zeige, dass die Inversion I auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar ist und dass die Ableitung von I das skalare Vielfache einer orthogonalen Transformation ist. Beweisen Sie dann, dass $\det(I'(x)) = -\frac{1}{|x|^{2d}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. (3)
Hinweis: Reduziere die Betrachtung auf die Bestimmung von $I'(\alpha e_1)$ mit $\alpha > 0$.

(c) Es sei $\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^d : x_n > 0\}$ der „obere" Halbraum im $\mathbb{R}^d$. Bestimme $I(\Omega + e_n)$ und $I(\partial\Omega + e_n)$. (2)

(d) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ offen. Zeige, dass $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ genau dann, wenn $Ku \in \mathcal{H}(I(\Omega))$. (4)

2. *Über Dirichlet-reguläre offene Mengen.* (4)

(a) Zeige, dass der Durchschnitt zweier nicht-disjunkter Dirichlet-regulärer offener Mengen wieder Dirichlet-regulär ist. (2)

(b) Zeige, dass die Vereinigung zweier disjunkter Dirichlet-regulärer offener Mengen wieder Dirichlet-regulär ist. Gilt das auch ohne die Voraussetzung der Disjunktheit? (2)

3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein äußeres Gebiet. Zeige, dass das Problem (2)

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) \text{ existiert in } \mathbb{R} \end{cases}$$

nur die triviale Lösung hat.
Hinweis: Verwende die Kelvintransformation und Aufgabe 4 von Blatt 4.