Universität Ulm

Besprechung: Donnerstag, 26.06.14
Gesamtpunktzahl: 10

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2014

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 9

Mathematiker sind Künstler ohne Publikum. Bei einem Musiker, der ein Stück Musik vorspielt, kann sich jeder eine Meinung bilden – um die Schönheit mathematischer Beweise nachzuvollziehen, muss man mit ihnen vertraut sein.

— Preda Mihăilescu (geb. 1955)

1. Es sei $1 \le p \le \infty$.

(a) Es sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Zeige, dass jedes $u \in W^{1,p}(I)$ einen stetigen Repräsentanten $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ hat. (4)
Hinweis: Untersuche $g(t) = \int_a^t D_1 u(s)\,\mathrm{d}s$. Verwende Blatt 8, Aufgaben 2 und 3 (a).

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Zeige, dass jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ einen Repräsentanten in $C(\Omega)$ hat. (2)
Kann man immer einen Repräsentanten in $C_0(\Omega)$ oder in $C(\overline{\Omega})$ finden?

(c) Gib ein Beispiel einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ derart, dass $W^{1,p}(\Omega)$ nicht die Fortsetzungseigenschaft hat und $C^\infty(\overline{\Omega})$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ ist. (1)

(d) Sei $a < b$ und $I = (a,b)$. Zeige, dass es ein $C > 0$ gibt mit $\|\tilde{u}\|_{C(\overline{I})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ für alle $u \in W^{1,p}(I)$ mit stetigem Repraesentanten $\tilde{u} \in C(\overline{I})$. (2)

(e) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Beschreibe den Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. (1)

Reverse Triangle Inequality! (http://brownsharpie.courtneygibbons.org/?p=339)