Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 10

Was wir mathematisch festlegen, ist nur zum kleinen Teil ein objektives Faktum, zum größeren Teil eine Übersicht über Möglichkeiten.

— Werner Karl Heisenberg (1901–1976)

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zudem sei $u \in H^1(\Omega)$ und $a \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $a(x) \geq \mu$ für alle $x \in \Omega$ für ein $\mu > 0$. Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Zeige, wenn $a^{-1/2} \operatorname{div}(a\nabla(a^{-1/2}u)) = f$, dann gibt es ein $q \in C(\overline{\Omega})$ so dass $\Delta u - qu = f$. (5)
Hinweis: Die Gleichungen sind natürlich im schwachen Sinn zu verstehen. Es kann hilfreich sein, zuerst einmal $u \in C^2(\overline{\Omega})$ anzunehmen.

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

(a) Wenn $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $D_j f = g$, dann gilt (3)

$$-\int_\Omega f \partial_j \phi = \int_\Omega g\phi$$

für alle $\phi \in C^1_{\mathrm{c}}(\Omega)$.

(b) Es seien $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $D_j f = g$. Dann gilt $\partial_j(f * \rho_n) = (D_j f) * \rho_n$ auf Ω_n und $\partial_j(f * \rho_n) \to g$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. (2)

(c) Es sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann gilt $u * \rho_n \to u$ in $W^{1,p}(\omega)$ für alle $\omega \Subset \Omega$. (2)

(d) Es sei Ω zudem zusammenhängend. Sei $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla u = 0$ fast überall auf Ω. Zeige, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $u = c$ auf Ω. (4)

3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Zeige, dass u einen lokal Lipschitz-stetigen Repräsentanten $\tilde{u} \in C(\Omega)$ hat. (4)
Hinweis: Sei $u_n \coloneqq u * \rho_n$. Betrachte $u_n(x) - u_n(y)$ für $x, y \in B \Subset \Omega$ und n groß. Verwende den Hauptsatz, und dass (zumindest entlang Teilfolge) $u_n(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in B$.

4. Sei $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ und $\Omega := B \setminus \{0\}$.

(a) Für $r \in (0,1)$ definiere (5)

$$h_r(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le r, \\ \frac{1}{\log r} \log |x| & \text{für } r < |x| \le 1. \end{cases}$$

Zeige, dass $h_r \in W^{1,2}(B) \cap C(\overline{B})$ für alle $r \in (0,1)$ und $h_r \to 0$ in $W^{1,2}(B)$ für $r \to 0+$.

(b) Sei $\phi \in \mathcal{D}(B)$. Zeige, dass $\phi|_\Omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$ unabhängig davon ob $\phi(0) = 0$. (2)

http://www.toonpool.com/toonagent/showimage?imageid=24888