Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 10.07.15
Gesamtpunktzahl: 25

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 12

„Damals studierte er Mathematik; aber später ist er ein Dichter geworden: Zum Mathematiker hatte er nicht genug Phantasie.“

— David Hilbert (1862–1943)

1. (a) Zeige, dass der Durchschnitt zweier nicht-disjunkter Dirichlet-regulärer offener Mengen wieder Dirichlet-regulär ist. (2)

(b) Zeige, dass die Vereinigung zweier disjunkter Dirichlet-regulärer offener Mengen wieder Dirichlet-regulär ist. Gilt das auch ohne die Voraussetzung der Disjunktheit? (3)

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in L^2(\Omega)$ mit $f \leq 0$ und $\lambda \geq 0$. Zeige: Wenn $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\lambda u - \Delta u = f$ ist, dann gilt $u \leq 0$ f.ü. (3)

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(a) Es sei $f \in L^\infty(\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\Delta u = f$ in Ω. Zeige, dass dann $u \in H_0^1(\Omega)$ ist. (3)
Hinweis: Verfahre wie im Beweis von Satz (21.2).

(b) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch und $G \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ mit $u = G$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u \in H^1(\Omega)$. Wie ist das mit dem Beispiel von Hadamard in Einklang zu bringen? (2)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Sei $z \in \partial\Omega$ und $B = B(z, r)$ für ein $r > 0$. Wir nennen eine Funktion $b \in C(\overline{\Omega \cap B})$ eine Barriere in z, wenn $b(x) > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega \cap B} \setminus z$, $b(z) = 0$ und $\Delta b \leq 0$ schwach. (Abgesehen von der fehlenden Forderung $b \in H^1(\Omega \cap B)$ ist das genau dieselbe Definition wie bei einer H^1 Barriere.) Es gilt: Wenn eine Barriere in z existiert, dann existiert auch eine H^1 Barriere in z. Wir verwenden dies bei Bedarf ohne Beweis.

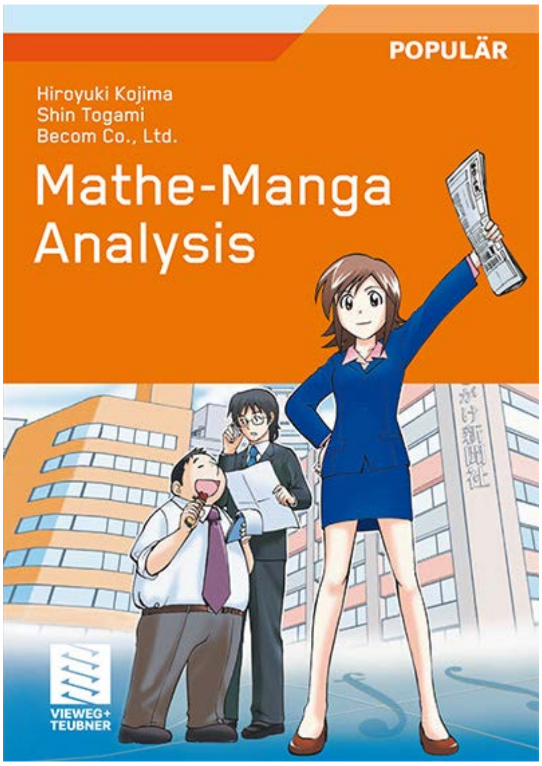
4. (a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Wir sagen, dass Ω die äußere Segmenteigenschaft hat, wenn für alle $z_0 \in \partial\Omega$ ein $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$ existiert mit $\lambda x_0 + (1-\lambda) z_0 \in \Omega^{\mathsf{c}}$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Zeige, wenn Ω die äußere Segmenteigenschaft hat, dann ist Ω Dirichlet regulär. (3)
Hinweis: Betrachte $\operatorname{Re} h$ für $h(z) = \frac{-1}{\log z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{(\alpha, 0) : \alpha \leq 0\}$, wobei $\log z$ der Hauptzweig des Logarithmus sei. Bestimme eine Barriere.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $z \in \partial\Omega$. Wir sagen, dass Ω die äussere Kugeleigenschaft in z hat, falls es ein $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{z\}$ gibt mit $\overline{B(x_0, |x_0 - z|)} \cap \overline{\Omega} = \{z\}$. Zeige, wenn Ω die äussere Kugeleigenschaft hat, dann ist z regulär. (3)
Hinweis: Bestimme eine H^1 Barriere für $d \geq 3$ mit Hilfe der Newton'schen Fundamentallösung.

5. Es sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zeige, dass dann $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $D_j u^+ = D_j u \mathbb{1}_{\{u>0\}}$. (3)
Hinweis: Blatt 11, Aufgabe 4 (c).

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty)$. Zeige, dass $W^{1,p}(\Omega) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ ist. (3)
Hinweis: Betrachte τ_h von Blatt 9, Aufgabe 1 für $h = \delta e_d$.



http://www.springer.com/us/book/9783834805676