Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 08.05.15
Gesamtpunktzahl: 30

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 3

Mathematical rigor is like clothing; in its style it ought to suit the occasion, and it diminishes comfort and restrains freedom of movement if it is either too loose or too tight.

— George F. Simmons

1. *Invarianzen der Wärmeleitungsgleichung auf* $\mathbb{R}^d$. (4)
Sei $u \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$. Zeige, dass $u_\alpha(t,x) := u(\alpha^2 t, \alpha x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v(t,x) := x \cdot \nabla u(t,x) + 2tu_t(t,x)$ ebenfalls Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind.

2. *Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Neumann Randbedingungen.* (15)
Wir betrachten folgende Gleichung:

$$\text{(NWLG)} \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{auf } (0,\infty) \times (0,\pi), \\ u_x(t,x) = 0 & \text{für alle } t \in (0,\infty) \text{ und } x \in \{0,\pi\}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{fur alle } x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(a) Zeige, dass $u_n(t,x) = e^{-n^2 t}\cos(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine (klassische) Lösung von (NWLG) mit $u_0(x) = \cos(nx)$ ist. (2)

(b) Sei $u_0 \in C^1[0,\pi]$ mit $u_0'(0) = u_0'(\pi) = 0$. Zeige, dass man Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ so wählen kann, dass (6)

$$u(t,x) := \frac{a_0}{2} u_0(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x)$$

eine Lösung von (NWLG) ist, mit $u \in C^\infty((0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C([0,\infty) \times [0,\pi])$.

(c) Sei $u \in C^1((0,\infty) \times [0,\pi]) \cap C([0,\infty) \times [0,\pi])$ eine Lösung von (NWLG). Zeige, dass die Funktion $\mathcal{W}(t) := \int_0^\pi u(t,x)\,\mathrm{d}x$ konstant auf $[0,\infty)$ ist. (2)

(d) Zeige, dass es für jedes $u_0 \in C[0,\pi]$ höchstens eine Lösung von (NWLG) in $C^1((0,\infty)\times [0,\pi]) \cap C([0,\infty) \times [0,\pi])$ gibt. (2)

Hinweis: Betrachte $\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_0^\pi |u(t,x)|^2\,\mathrm{d}x$.

(e) Bestimme die Lösung von (NWLG) für $u_0(x) = \sin^2 x$. (3)

3. Es sei $\Omega = \mathbb{R} \times (0,1)$. Zeige, dass (6)

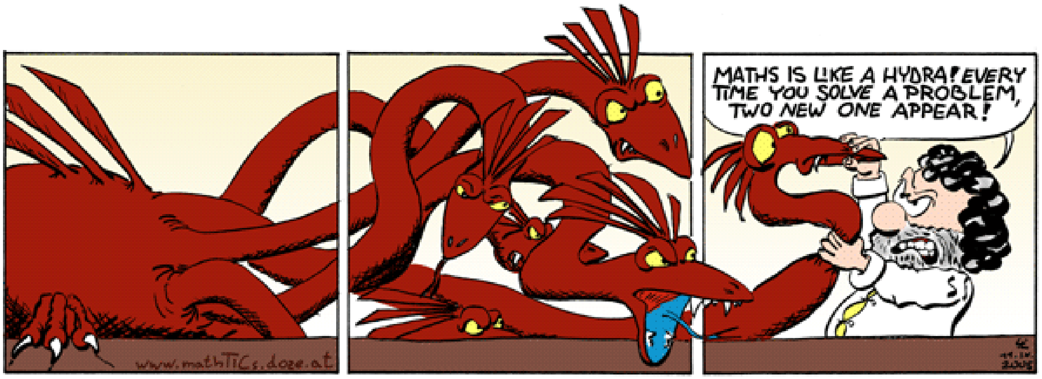
$$\begin{cases} \quad u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

eine Lösung u hat, welche $u > 0$ auf Ω erfüllt. Kann man darüber hinaus auch noch fordern, dass $u(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$?

Hinweis: Trennung der Variablen.

4. Löse das folgende Anfangswertproblem: (5)

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ 2u_t + 3u_x = \cos x \\ u(0,x) = \frac{2}{3} \sin x \end{cases}$$



`http://www.mathtics.doze.at/archiv01/mathTICs019.png`