Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 15.05.15
Gesamtpunktzahl: 25

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

# Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 4

Er ist ein Mathematiker und also hartnäckig.
— Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)

**1.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $a_{kl}, b_k, c_k, c_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $(a_{kl})$ strikt elliptisch ($k, l = 1, \dots, d$) und $V = H_0^1(\Omega)$ oder $V = H^1(\Omega)$. Definiere $\mathfrak{a} \colon V \times V \to \mathbb{R}$ durch (5)

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int_\Omega \sum_{k,l=1}^d a_{kl} D_k u D_l v + \int_\Omega \sum_{k=1}^d b_k u D_k v + \int_\Omega \sum_{k=1}^d c_k (D_k u) v + \int_\Omega c_0 uv.$$

Zeige, dass es ein $\omega > 0$ gibt, so dass $\mathfrak{b}(u,v) := \mathfrak{a}(u,v) + \omega (u \,|\, v)_{L^2(\Omega)}$ eine koerzive stetige Bilinearform ist.
*Hinweis:* Benutze die Young'sche Ungleichung für Produkte, also dass $2ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

**2.** *Testfunktionen und* $H_0^1(\Omega)$. (8)

(a) Es sei $\phi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch (2)

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\Big(\frac{1}{|x|^2 - 1}\Big) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Zeige, dass $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

(b) Zeige, dass für alle offenen und nichtleeren $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ der Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht trivial ist. (1)

(c) Zeige, dass für ein beschränktes offenes (wie immer nichtleeres) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ niemals $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ gilt. (2)

(d) Zeige, dass die Poincaré-Ungleichung auf $H_0^1(\mathbb{R}^d)$ nicht gilt. (3)

**3.** Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\lambda > 0$. Wir betrachten das Problem (5)

$$\text{(IH)} \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{auf } \Omega, \\ \quad u \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

für $f \in L^2(\Omega)$. Zeige, dass es für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige (schwache) Lösung $u_f \in H^1(\Omega)$ gibt. Beweise zudem, dass in diesem Fall die Abbildung $f \mapsto u_f$ stetig und linear von $L^2(\Omega)$ nach $H^1(\Omega)$ ist.
*Hinweis:* Die Gleichheit $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$ darf verwendet werden.

**4.** *Elementares zu Sobolevräumen.* (7)

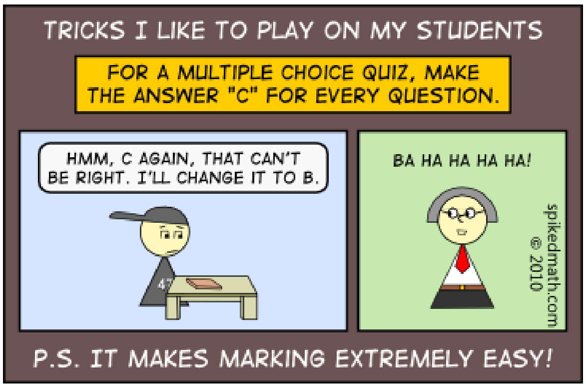
(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Zeige, dass es eine Funktion $u \in C(I)$ gibt, welche schwache Ableitung $D_1 u = g$ hat. (3)

(b) Zeige, dass die schwache Ableitung lokal ist. Genauer gesagt, wenn $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ schwache Ableitungen haben und $f = g$ f.ü. auf $B(x_0, r)$ gilt (mit einem $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$ so dass $B(x_0, r) \subset \Omega$), zeige dass dann $D_j f = D_j g$ f.ü. auf $B(x_0, r)$ gilt. (2)

(c) Gib ein Beispiel einer stetigen monotonen Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, welche fast überall die klassische Ableitung 0 hat. Welcher Schluss ergibt sich aus dem vorigen Aufgabenteil? (2)
*Hinweis:* Verfahre wie bei der Konstruktion der Cantormenge und wähle stets einen geeigneten konstanten Wert auf dem entfernten mittleren Drittel.

(d) Sei $\Omega = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass die unbeschränkte Funktion $u(x) = \log\log(1 + \frac{1}{|x|})$ (mit beliebigem Wert an $x = 0$) in $H^1(\Omega)$ liegt. (3*)

(e) Sei $\Omega = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$. Verwende den vorigen Aufgabenteil um zu zeigen, dass es ein $u \in H^1(\Omega)$ gibt, welches nirgends stetig ist. (2*)




`http://spikedmath.com/309.html`