Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 29.05.15
Gesamtpunktzahl: 18

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 6

Die Mehrheit bringt der Mathematik Gefühle entgegen, wie sie nach Aristoteles durch die Tragödie geweckt werden sollen, nämlich Mitleid und Furcht. Mitleid mit denen, die sich mit der Mathematik plagen müssen, und Furcht: dass man selbst einmal in diese gefährliche Lage geraten könne.

— Paul Epstein (1883–1966)

1. Seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $T\colon X \to Y$ wird kompakt genannt, falls T jede beschränkte Menge in X auf eine relativ kompakte Menge in Y abbildet.

(a) Sei $T\colon X \to Y$ linear und kompakt. Zeige, dass T stetig ist. (2)

(b) Sei $\Omega = (-1,1)^{d-1} \times \mathbb{R}$ mit $d \geq 1$. Sei $1 < p < \infty$. Zeige, dass $W_0^{1,p}(\Omega)$ nicht kompakt in $L^p(\Omega)$ eingebettet ist. (2)
Hinweis: Konstruiere eine geeignete Folge (u_n) in $\mathcal{D}(\Omega)$, welche beschränkt in $W^{1,p}(\Omega)$ ist, aber keine in $L^p(\Omega)$ konvergente Teilfolge haben kann.

(c) Zeige, dass $C^1[0,1] \overset{c}{\hookrightarrow} C[0,1]$. (1)
Hinweis: Arzela–Ascoli

(d) Seien X, Y, Z Banachräume mit $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y \hookrightarrow Z$. Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existiert mit $\|x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C_\varepsilon \|x\|_Z$ für alle $x \in X$. (3)
Hinweis: Widerspruchsbeweis mit Renormierung, ähnlich wie bei Poincaré-Ungleichung.

(e) Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existiert mit $\|u\|_\infty \leq \varepsilon \|u'\|_\infty + C_\varepsilon \|u\|_{L^1(0,1)}$ für alle $u \in C^1[0,1]$. (1)

(f) Zeige, dass $W^{m,p}(0,1) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m-1}[0,1]$ für $1 < p \leq \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Bekommt man auch für $p = 1$ eine kompakte Einbettung? (3)

(g) Sei $1 < p \leq \infty$. Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existiert mit (1)

$$\|u'\|_{L^\infty(0,1)} + \|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \varepsilon \|u''\|_{L^p(0,1)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^1(0,1)}$$

für alle $u \in W^{2,p}(0,1)$.

2. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir betrachten das Problem (5)

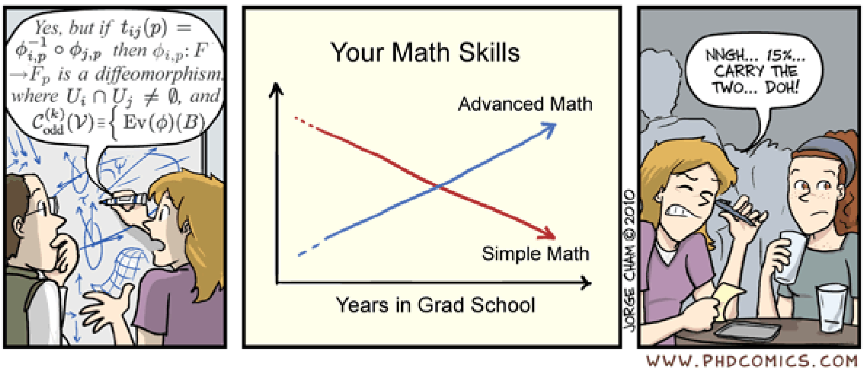
$$\begin{cases} u'(t) - \Delta(u(t)) = f & \text{in } L^2(\Omega) \text{ für alle } t > 0, \\ u(t) \in H_0^1(\Omega) & \text{für alle } t > 0, \\ u(0) = u_0, & \end{cases}$$

wobei $f, u_0 \in L^2(\Omega)$. Die gesuchte Funktion u ist von der Form $u\colon [0,\infty) \to L^2(\Omega)$. Zeige, dass für alle $f, u_0 \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung in $C^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,\infty); L^2(\Omega))$ existiert.
Hinweis: Verfahre wie in (13.4) und (13.5) in der Vorlesung.

3. Wir verwenden die Notation von (13.3). Seien also V, H Hilberträume mit $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ kompakt und dicht, und $\mathfrak{a}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sei eine stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform. Zeige, dass (4*)

$$\lambda_1 = \inf_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{\mathfrak{a}(u,u)}{\|u\|_H^2}.$$

Wie sieht eine ensprechende Formel für λ_k aus?



http://www.phdcomics.com/comics/archive.php?comicid=1356