Universität Ulm

Besprechung: Freitag, 19.06.15
Gesamtpunktzahl: 25

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2015

Übungen Partielle Differentialgleichungen: Blatt 9

In der Mathematik gibt es keine Autoritäten. Das einzige Argument für die Wahrheit ist der Beweis.

— Kazimierz Urbanik

1. Es sei $1 \le p < \infty$ und $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Für alle $h \in \mathbb{R}$, definiere $\tau_h \colon L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ durch $f \mapsto f(\cdot - hz)$. Zeige: τ_h ist ein isometrischer Isomorphismus und es gilt $\lim_{h\to 0} \tau_h f = f$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Konvergiert τ_h in Operatornorm gegen die Identität auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $h \to 0$? (4)
Hinweis: Betrachte zuerst $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2. (a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Zudem sei $S \subset C(\partial\Omega)$ derart, dass die lineare Hülle von S dicht in $C(\partial\Omega)$ sei. Zeige, wenn das Dirichlet Problem (3)

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

lösbar ist für alle $g \in S$, dann ist es lösbar für alle $g \in C(\partial\Omega)$.

(b) Gib ein Beispiel von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und beschränkt, und einer Folge (u_n) in $\mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ derart, dass es ein $M > 0$ gibt mit $\|u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber so dass (u_n) keine Teilfolge hat, welche gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$ konvergiert. (3)

3. Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $U_1, \dots, U_m$ offen mit $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_k$. Zeige, dass es Funktionen $\phi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ für $k = 1, \dots, m$ mit folgenden Eigenschaften gibt: (6)

- $0 \le \phi_k \le 1$;
- $\operatorname{supp} \phi_k \subset U_k$;
- $\sum_{k=1}^m \phi_k = 1$ auf K.

Hinweis: Zeige erst, dass es offene Mengen $V_k \Subset U_k$ gibt mit $K \subset \bigcup_{k=1}^m V_k$. Finde damit entsprechende Funktionen in $C_c(U_k)$. Dann regularisieren und normalisieren.

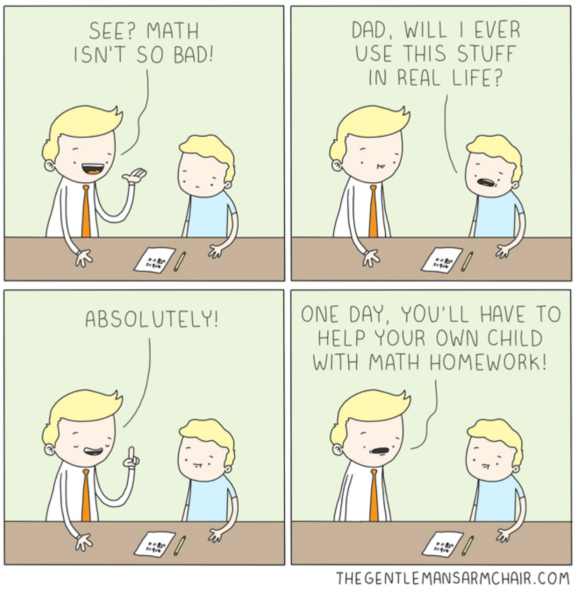
In der folgenden Aufgabe verwenden wir Multiindizes. Dazu sei die Dimension $d \in \mathbb{N}$ fixiert. Ein Multiindex ist ein $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ in $\mathbb{N}_0^d$. Man definiert beispielsweise $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_d!$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ für $x \in \mathbb{R}^d$ und $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}}$.

4. (a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $M > 0$ derart, dass $|u(x)| \le M$ für alle $x \in \Omega$. Zeige, dass für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ und $x \in \Omega$ gilt (6)

$$|D^\alpha u(x)| \le \Big(\frac{d|\alpha|}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)}\Big)^{|\alpha|} M.$$

Hinweis: Verwende Induktion über $|\alpha|$, die Mittelwerteigenschaft für Bälle und den Satz von Gauß.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und (u_n) eine Folge in $\mathcal{H}(\Omega)$ welche gleichmäßig auf Kompakta gegen ein $u \in C(\Omega)$ konvergiert. Zeige, dass $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ und dass $D^\alpha u_n$ gleichmäßig auf Kompakta gegen $D^\alpha u$ konvergiert für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. (3)



http://thegentlemansarmchair.com/comic/math/