Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 22.04.16
Gesamtpunktzahl: 30

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Übungen Lineare Algebra 2: Blatt 1

> Daß die niedrigste aller Geistestätigkeiten das Rechnen sei, wird dadurch belegt, daß sie die einzige ist, welche auch durch eine Maschine ausgeführt werden kann; [...] Nun läuft aber alle *analysis finitorum et infinitorum* im Grunde doch auf Rechnerei zurück. Danach bemesse man den „mathematischen Tiefsinn“ [...].
>
> — Arthur Schopenhauer (1788–1860)

Die Übungsblätter haben stets einen schriftlichen (Übungsaufgaben) und einen mündlichen Teil (Präsenzaufgaben). Die Präsenzaufgaben sind bis zum Übungstutorium der direkt folgenden Woche vorzubereiten, in diesem Fall also bereits zum Tutorium in der zweiten Woche.
Die Übungsaufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und dürfen zu zweit zusammen mit einem anderen Teilnehmer desselben Übungstutoriums abgegeben werden. Die Abgabe erfolgt jeweils am Freitag vor der Übungsveranstaltung. Auf den Lösungen müsst Ihr oben auf dem Deckblatt Namen, die Gruppennummer und den Namen Eures Tutors angeben. Die Lösungen legt Ihr zudem bei der Abgabe gleich in den jeweiligen Ordner Eures Tutors ein. Ihr erhaltet dann im Übungstutorium der darauffolgenden Woche Eure Lösungen korrigiert und bewertet zurück.

Präsenzaufgaben

1. Recherchiere, was der Satz von Cantor-Bernstein-Schröder im Kontext von injektiven Abbildungen besagt. Was hat das mit der Äquivalenzrelation der Gleichmächtigkeit zu tun?

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $SO(n)$ ein Normalteiler von der orthogonalen Gruppe $O(n)$ ist.

3. Aus dem Beweis des Lemmas von Bézout erhält man leicht einen Algorithmus für die Bestimmung von s und t. Berechne $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot 6019 + t \cdot 2015 = \mathrm{ggT}(6019, 2015)$.

Übungsaufgaben

1. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige, dass eine nichtleere Teilmenge $U \subset G$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn für alle $a, b \in U$ gilt, dass $ab^{-1} \in U$ ist. (4)

2. Es seien G und K Gruppen und $\phi\colon G \to K$ ein Gruppenhomomorphismus. Betrachte $M := \phi^{-1}(N)$, wobei N ein Normalteiler von K sei. Zeige, dass dann M ein Normalteiler von G ist. (4)

3. Sei $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Zeige, dass genau diejenigen Elemente $[n] \in \mathbb{Z}_p$ ein multiplikatives Inverses haben, für welche $\mathrm{ggT}(n, p) = 1$ gilt. Folgere daraus, dass $\mathbb{Z}_{6019}$ kein Körper ist. (4)

4. Zeige folgende Verallgemeinerung vom Lemma von Bézout: Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}$ mit (4)

$$\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n.$$

5. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd gegeben. (4+2)

(a) Zeige, dass es ein $x_1 \in \mathbb{Z}$ gibt, mit $x_1 \equiv 1 \mod p_1$ und $x_1 \equiv 0 \mod p_k$ für alle $k \in \{2, \ldots, n\}$.

(b) Folgere, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \mod p_1 \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \mod p_n \end{aligned}$$

für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ immer lösbar ist.

6. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ wie folgt: $A \sim B$, genau dann wenn eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{m\times m}$ existiert mit $SA = B$. (2+2+4)

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert.

(b) Zeige, dass durch $f\colon \mathbb{K}^{m\times n}/{\sim} \to \mathbb{N}_0$, $f([A]) := \mathrm{rg}(A)$ eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist.

(c) Finde ein besonders einfaches Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation $\sim$, d.h. finde $\mathcal{R} \subset \mathbb{K}^{m\times n}$ so, dass $\mathcal{R} \cap [A]$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ immer einelementig ist.