Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Abgabe: Freitag, 06.05.16
Gesamtpunktzahl: 30

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 3

Auch Mathematiker können unberechenbar sein.

— Kurt Haberstich (geb. 1948)

Präsenzaufgaben

1. Sei V ein Vektorraum und $P, Q\colon V \to V$ seien Projektionen. Zeige, dass $P+Q$ und $P \circ Q$ im Allgemeinen keine Projektionen mehr sind.

2. Seien V_1 und V_2 zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige, dass $V_1 \times V_2$ versehen mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation wiederum ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Diesen bezeichnen wir mit $V_1 \boxplus V_2$. Bestimme $\dim(V_1 \boxplus V_2)$ und gibt ein interessantes Beispiel mit sehr „unterschiedlichen" Vektorräumen V_1 und V_2.

3. Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine Matrix mit Rang k, welche wir wie üblich als lineare Abbildung von $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ auffassen. Begründe, weshalb die Darstellungsmatrix von A durch Basiswechsel in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ auf die Form

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

gebracht werden kann.

Übungsaufgaben

1. Die Charakteristik eines Körpers $\mathbb{K}$ ist, sofern existent, die kleinste natürliche Zahl n derart, dass für die n-fache Summe $1 + \cdots + 1 = 0$ in $\mathbb{K}$ gilt, und ansonsten 0. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{Z}_p$ mit p prim ein Körper mit Charakteristik p ist. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir definieren eine Abbildung $D\colon \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t]$ durch (4+4+4)

$$D(a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0) := \Big(\sum_{k=1}^{n} a_n\Big) t^{n-1} + \cdots + \Big(\sum_{k=1}^{2} a_2\Big) t + \Big(\sum_{k=1}^{1} a_1\Big).$$

(a) Zeige, dass $D(\alpha f + g) = \alpha D(f) + D(g)$ und $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$ für alle $f, g \in \mathbb{K}[t]$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt. Insbesondere ist D also eine lineare Abbildung auf $\mathbb{K}[t]$, wenn man $\mathbb{K}[t]$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum versteht.

(b) Für $\mathbb{K}$ mit Charakteristik 0, zeige $\deg D(f) = \deg f - 1$ falls $\deg f \geq 1$, bestimme $\operatorname{Ker} D$ und zeige D ist surjektiv. Zeige, dass $\dim \operatorname{Ker} D = \infty$ und D nicht surjektiv ist, falls $\mathbb{K}$ Charakteristik $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ hat.

(c) Die Charakteristik von $\mathbb{K}$ sei 0. Sei $p \in \mathbb{K}[t]$ mit $\deg p \geq 1$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $p(\lambda) = 0$ gegeben. Zeige, für die Vielfachheit gilt $\mu(p, \lambda) \geq 2$ genau dann, wenn $(t-\lambda) \mid D(p)$.

2. Sei V ein Vektorraum. Für einen Unterraum U von V setzen wir $\operatorname{codim} U := \dim(V/U)$. (2+4+6)

(a) Sei U ein Unterraum von V. Zeige, dass $\operatorname{codim} U + \dim U = \dim V$. Begründe insbesondere, dass diese Gleichung auch bei unendlichen Dimensionen stimmt.

(b) Sei $V = V_1 \oplus V_2$ für Unterräume V_1, V_2. Sei U_1 ein Unterraum von V_1, und U_2 ein Unterraum von V_2. Zeige, dass dann $(V_1 \oplus V_2)/(U_1 \oplus U_2)$ isomorph zu $V_1/U_1 \boxplus V_2/U_2$ ist.

(c) Seien U_1, U_2 Unterräume von V. Zeige, dass es lineare Abbildungen

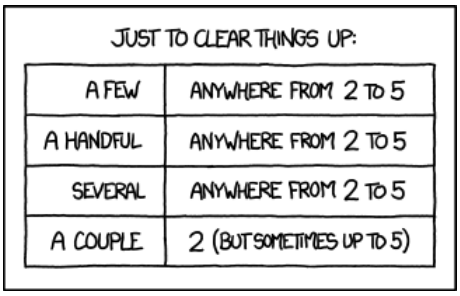
$$f_0 \colon V/(U_1 \cap U_2) \to V/U_1 \boxplus V/U_2 \quad \text{und} \quad f_1 \colon V/U_1 \boxplus V/U_2 \to V/(U_1 + U_2)$$

derart gibt, dass f_0 injektiv, f_1 surjektiv und $\operatorname{Bild} f_0 = \operatorname{Ker} f_1$ ist. Folgere, dass $\operatorname{codim}(U_1 \cap U_2) + \operatorname{codim}(U_1 + U_2) = \operatorname{codim} U_1 + \operatorname{codim} U_2$ gilt.

3. Es seien $n_0 \in \mathbb{N}$, $f \colon \mathbb{K}_n[t] \to \mathbb{K}^{n+1}$ und $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{K}$ gegeben. (Hier ist $\mathbb{K}_n[t]$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.) Es sei $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^{n+1}$ und $\mathcal{B} = (1_{\mathbb{K}[t]}, t, \ldots, t^n)$ eine Basis von $\mathbb{K}_n[t]$. Wir nehmen an, dass (6)

$$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}$$

gilt. Zeige, dass es genau dann eine Basis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{K}_n[t]$ mit $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}'} = E_{n+1}$ gibt, wenn $t_j \neq t_k$ für alle $j < k$ mit $j, k \in \{0, \ldots, n\}$. Bestimme dann unter dieser Bedingung eine solche Basis $\mathcal{B}'$. Ist $\mathcal{B}'$ eindeutig bestimmt?



`https://xkcd.com/1070/`