Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Sommersemester 2016

Abgabe: Freitag, 13.05.16
Gesamtpunktzahl: 30+4*

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 4

Schon die Mathematik lehrt uns, dass man Nullen nicht übersehen darf.

— Gabriel Laub (1928–1998)

Präsenzaufgaben

1. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimme alle Unterräume U von $\mathbb{C}^3$ mit $A(U) \subset U$. Begründe damit, weshalb $\mathbb{C}^3$ nur als eine triviale unter A invariante direkte Summe geschrieben werden kann.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $f\colon V \to V$ linear. Wir nehmen an, dass das charakteristische Polynom p_f über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeige, dass die Determinante von f das Produkt der Eigenwerte ist. Wie geht dabei die Vielfachheit der Eigenwerte ein?

Übungsaufgaben

1. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Zeige, dass eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ genau dann invertierbar ist, wenn die Darstellungsmatrix $[f]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}$ invertierbar ist, wobei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $\mathcal{G}$ eine Basis von W sei. Zeige zudem, dass in diesem Fall die Inverse von $[f]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}}$ die Darstellungsmatrix von f^{-1} bezüglich $\mathcal{G}$ und $\mathcal{B}$ ist. (6)

2. Seien $A_1 \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $A_2 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ durch (4+6)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4+i & 6 & -5 \\ -1 & 2+i & -1 \\ 2 & -4 & 2+i \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir verstehen beide Matrizen als lineare Abbildungen bezüglich der kanonischen Basis. Bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bezüglich der A_1 eine obere Dreiecksmatrix ist, und eine Basis von $\mathbb{C}^3$ bezüglich der A_2 eine obere Dreiecksmatrix ist.

Hinweis: Die Matrix A_2 hat den Eigenwert i.

3. Es sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix (3+5)

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{G} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Basen von $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$ sind.

(a) Bestimme die Darstellungsmatrix von f bezüglich der kanonischen Basen.

(b) Bestimme Basen $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{G}'$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $[f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{G}'}$ die Normalform aus Satz (9.4) aus der Vorlesung hat.

4. Wir wissen, dass $\mathbb{Z}_p$ für p prim ein endlicher Körper mit Charakteristik p ist. (6+4*)

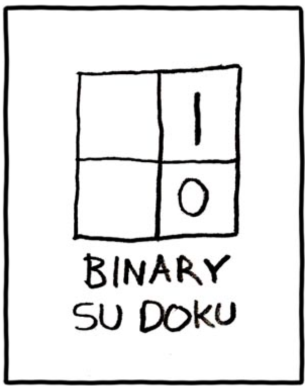
(a) Sei $\mathcal{R}$ ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit $1 \neq 0$. Definiere eine Relation auf $X := \mathcal{R} \times (\mathcal{R} \setminus \{0\})$ durch $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ genau dann wenn $a_1 b_2 = b_1 a_2$. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und $X/\sim$ mit den Verknüpfungen

$$[(a_1, b_1)] + [(a_2, b_2)] := [(a_1 b_2 + b_1 a_2, b_1 b_2)] \quad \text{und} \quad [(a_1, b_1)] \cdot [(a_2, b_2)] := [(a_1 a_2, b_1 b_2)]$$

ein Körper wird. Dieser Körper heißt der Quotientenkörper von $\mathcal{R}$.

(b) Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Gib ein Beispiel eines unendlichen Körpers mit Charakteristik p.

Hinweis: Betrachte $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_p[t]$.



`https://xkcd.com/74/`