Universität Ulm

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter

Sommersemester 2016

Abgabe: Freitag, 17.06.16
Gesamtpunktzahl: 30+4*

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 9

> Was wir mathematisch festlegen, ist nur zum kleinen Teil ein objektives Faktum, zum größeren Teil eine Übersicht über Möglichkeiten.
>
> — Werner Heisenberg (1901–1976)

Präsenzaufgaben Woche 9

1. Gib die reelle Jordansche Normalform folgender komplexer Matrizen an:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} J_3(1+i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\alpha-2i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2(\alpha+2i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3(1-i) \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

Welche der reellen Jordanschen Normalformen ist als reelle Abbildung semisimpel?

2. (a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeige, in der Jordanschen Normalform von A gibt es zu jedem Eigenwert exakt ein Jordankästchen genau dann wenn $M_A = (-1)^n P_A$.

(b) Zeige, es gibt keine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Minimalpolynom $M_A = t^2 + 1$.

Übungsaufgaben

1. Sei V endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{L}(V)$. Sei $V = V_1 \oplus V_2$ mit $f(V_1) \subset V_1$ und $f(V_2) \subset V_2$. Setze $f_1 := f|_{V_1} \in \mathcal{L}(V_1)$ und $f_2 := f|_{V_2} \in \mathcal{L}(V_2)$. (6)
Zeige, wenn $\sigma(f_1) = \{\lambda\}$ und $\sigma(f_2) = \sigma(f) \setminus \{\lambda\}$, dann gilt $V_1 = H(f, \lambda)$ (also V_1 ist der Hauptraum von f zu $\lambda \in \mathbb{C}$).

2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, $n = \dim V < \infty$ und $f \in \mathcal{L}(V)$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$ derart, dass $A := [f_{\mathbb{C}}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige, dass es dann eine Basis $\mathcal{B}'$ von V gibt, mit $A = [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$. (8)

Hinweis: Kommutative Diagramme und Satz 18.2: Wenn $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ über $\mathbb{C}$ ähnlich sind, so sind sie auch über $\mathbb{R}$ ähnlich.

3. Sei V ein Vektorraum, $f, g \in \mathcal{L}(V)$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, wenn $f \circ g = g \circ f$, dann gilt (4)

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

Hierbei ist $\binom{n}{k}$ natürlich ein Binomialkoeffizient, also $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Zeige, dass die Formel im Allgemeinen nicht stimmt, wenn f und g nicht kommutieren.

4. In dieser Aufgabe bezeichnet $p^{(k)} \in \mathbb{C}[t]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ die k-te (formale oder auch komplexe) Ableitung eines Polynoms $p \in \mathbb{C}[t]$; also mit der Notation aus Aufgabe 1, Blatt 3 gilt $p^{(k)} = D^k(p)$. (6+6+4*)

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}[t]$, $d \in \mathbb{N}$ und $J = J_d(\lambda) \in \mathbb{C}^{d\times d}$ ein Jordanblock zum Eigenwert λ. Zeige, dass

$$p(J) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & \frac{p^{(1)}(\lambda)}{1!} & \frac{p^{(2)}(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{p^{(d-1)}(\lambda)}{(d-1)!} \\ 0 & p(\lambda) & \frac{p^{(1)}(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{p^{(d-2)}(\lambda)}{(d-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p(\lambda) & \frac{p^{(1)}(\lambda)}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende $J = \lambda E_d + N$ und Aufgabe 3.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix mit Minimalpolynom $M_A = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (t-\lambda_s)^{m_s}$, wobei $s \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$ seien.

Zeige, wenn für $p, q \in \mathbb{C}[t]$ gilt, dass $p^{(j)}(\lambda_k) = q^{(j)}(\lambda_k)$ für alle $k \in \{1, \dots, s\}$ und $j \in \{0, \dots, m_k - 1\}$, dann gilt $p(A) = q(A)$ und $M_A \mid (p-q)$.

(c) Seien $s \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$. Setze $m := m_1 + \dots + m_s$. Zeige, dass die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}_{m-1}[t] \to \mathbb{C}^m$ gegeben durch

$$p \mapsto \begin{pmatrix} p^{(0)}(\lambda_1) \\ \vdots \\ p^{(m_1-1)}(\lambda_1) \\ \vdots \\ p^{(0)}(\lambda_s) \\ \vdots \\ p^{(m_s-1)}(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

linear und bijektiv ist; hierbei bezeichnet $\mathbb{C}_{m-1}[t]$ den Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner m. Leite daraus eine Aussage über eine Verallgemeinerung der Lagrange-Polynominterpolation für Polynome mit vorgegebenen Funktionswerten und Ableitungen ab.

http://www.mathtics.doze.at/